UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Problemes de repartiment: regles i jocs cooperatius

Aleix Hierro Fortuny

Tutor: **Dr. Javier Martínez de Albéniz**
Dept. de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial

Barcelona, Juny 2020

Resum

En aquest treball tractem els problemes de repartiment, que es donen quan hi ha un cert bé a repartir i la suma de totes les demandes dels agents que reclament part del bé és superior a aquest. L'estudiem des d'un punt de vista axiomàtic, estudiant les propietats que regeixen els problemes i les seves regles.

Per tal de fer un bon estudi, estructurem el treball amb 4 parts diferenciades, en la primera, ens serveix per presentar els problemes de repartiment i les diferents regles que els resolen, fixant-nos sobretot amb les 4 regles més importants que hi ha, a més passem per damunt un seguit de regles no tant importants, però que també val la pena esmentar.

La següent part que fem és la més important d'aquest treball, la caracterització de les 4 regles de repartiment més importants. Comencem definint un seguit de propietats que ens serviran després per a fer la caracterització.

En la tercera part del treball, ens mirem els problemes de repartiment des d'un punt de vista diferent, des de la teoria de jocs. Estudiem la relació que trobem entre els jocs cooperatius i els problemes de repartiment, en concret, entre les regles de repartiment i les solucions puntuals d'aquests jocs.

Per acabar, estudiem dos articles escrits recentment on s'aplica la teoria dels problemes de repartiment a problemes d'actualitat en la societat. El primer discuteix el repartiment del pressupost de sanitat a Catalunya entre els diferents camps que comprèn. El segon, estudia el repartiment de la permissió d'emissions de CO_2 entre les diferents regions mundials.

Abstract

In this work we study claims problems, which happen when there is a certain estate to be distributed and the sum of the claims of all agents is greater than the estate. We study it from an axiomatic point of view, studying the properties of those problems and their distribution rules.

We structure the work in 4 parts. Firstly, we present the claims problems and the different distribution rules, paying attention on the 4 most important rules. Besides that, we define some more rules that are not so important, but worth mentioning.

The next part is the most important of this work, the characterization of the 4 most important sharing rules. We begin the chapter defining some properties that will later use to make the characterization of them.

In the third part, we look at claims problems from a different point of view, from cooperative game theory. We study the relations between cooperative games and claims problems, specifically between distribution rules and point solutions for that kind of games.

Finally, we discuss two recent papers where claims problems are used to solve current problems in society. The first tells us about the distribution of the health budget in Catalonia. The second studies the distribution of the permission of CO_2 emissions amongst the different world regions.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A12, 91B32

Agraïments

Agraeixo al Doctor Javier Martínez de Albéniz tota l'ajuda que m'ha ofert, temps dedicat i documentació facilitada per a la confecció d'aquest treball. Sense la seva ajuda i els seus consells tot això no hauria estat possible.

Així mateix, vull agrair també a la meva família i als meus amics més propers tot el suport i ànims donats durant tot aquest semestre. El suport de les persones més estimades i del meu tutor m'ha permès arribar fins aquí.

Qui sabrà mai aquest camí
a què em convida!
I és camí incert cada matí,
n'és cada vida!

Josep Carner (1884–1970)

Índex

Capítol 1

Introducció

Com repartirem quan no n'hi ha prou? Quan un grup d'agents o persones tenen unes demandes que sumen més del que tenim disponible per repartir, quina és la manera correcta de dividir-ho? Amb aquesta pregunta van sorgir els problemes de repartiment, també anomenats, en el més popular dels casos, problemes o jocs de bancarrota. Fixem-nos que aquests problemes estan molt arrelats en la nostra vida quotidiana, no només ho veiem en el món de l'economia quan una empresa entra en bancarrota, sinó que també tenim problemes de repartiment en el nostre dia a dia, per exemple, en el repartiment del menjar en una família a l'hora de dinar, com ho faran si no n'hi ha prou per satisfer-los a tots?

Evidentment, els problemes en la vida real són molt més complicats que els que podrem plantejar en aquest estudi de forma teòrica, però podrem treure algunes conclusions importants sobre la decisió a prendre davant d'un problema de repartiment. El primer que ens ve a la ment quan parlem de problemes de racionament serà repartir el capital o el bé a dividir de forma proporcional depenent de les demandes que tinguem, però veurem que la forma proporcional no és la única forma de repartiment possible i justa, ho podrem dividir de forma equitativa.

Seguint aquest criteri, podrem fer que tots els agents es divideixin el capital el més igualitàriament possible. Per altra banda, seguint el mateix criteri, també podem repartir-ho de forma que tothom tingui les pèrdues el més similars possibles. Aquests només són dos exemples de solucions que difereixen de la més habitual, però veurem que n'hi ha més, on cada una segueix un criteri de repartiment diferent. A més, observarem que depenent del punt de vista des del que ens plantegem el problema, és a dir, depenent de l'agent, veurem que les preferències cap a una regla o cap a una altra canviaran.

Tot i que mai sabrem en concret quan les persones ens vàrem començar a plantejar els problemes de repartiment, els primers llocs on en podem trobar diversos exemples és en el llibre del Talmud, un codi civil, elaborat entre el segle III i el V. Es té coneixença de dues versions d'aquest llibre, el de Jerusalem i el de l'antiga Babilònia. En ells, trobem un seguit de contractes, vendes, compres i resolucions d'herències, que els rabins resolien seguint una certa lògica i donant una solució. En aquests llibres ja apareixen diferents formes de resoldre els problemes de repartiment que difereixen de la regla proporcional.

No va ser fins fa vora 50 anys, que es va introduir l'estudi dels problemes de repartiment en la societat matemàtica. Els inicis d'aquesta nova disciplina es van basar en l'estudi d'aquests contractes inclosos en el Talmud i de la lògica que hi havia darrere les seves solucions.

Durant aquest temps, s'han diferenciat 3 formes d'estudi diferents sobre el mateix problema: El primer és el directe, que comença i es centra en les regles de repartiment, és l'estudi menys rigorós de tots, que es basa en diferents exemples que satisfan gairebé tots els diferents punts de vista que hi pot haver. Un altre mètode d'estudi és l'axiomàtic, que es centra en l'estudi de les propietats i la caracterització de les regles. És un tipus d'estudi més rigorós, que acaba desembocant amb una caracterització concreta de cada regla. Per últim, es pot dirigir l'estudi des del punt de vista de la teoria de jocs, observant el problema de repartiment com un joc i veient les regles de repartiments com a solucions d'aquests jocs.

En concret, el primer que en va parlar va ser en Rebinovitch al 1973 [25] que va estudiar i analitzar cada tractat per a treure les primeres conclusions. Més endavant, O'Neill al 1982 [20], que com Rebinovitch, va estudiar el Talmud, partint d'analitzar la divisió que el rabí Abraham Ibn Ezra va fer en un problema de repartiment d'una herència, d'on més tard sortiria la regla de la mínima superposició. Un cop analitzat el repartiment, va proposar diferents solucions al problema en qüestió a més d'establir un seguit de propietats que creia convenient que les regles complissin. Podem dir que aquest treball és la primera anàlisi formal dels problemes de repartiment.

Un dels articles més importants en la història dels problemes de repartiment va ser escrit per Aumann i Maschler al 1985 [2] en el que un altre cop, a partir de l'estudi del Talmud, ja s'endinsen més en l'estudi de les propietats de cada regla i treballen en una caracterització de les regles donades. A més, trobem la primera aproximació entre els jocs cooperatius i els problemes de repartiment.

A partir d'aquests 3 grans articles, se n'han continuat fent, per exemple, Thomson és un dels grans matemàtics actuals que s'ha dedicat a estudiar aquests problemes. El 2003 va fer un article [32] que es pot considerar com un manual de totes les regles de repartiment que existeixen actualment i les famílies amb les que estan agrupades.

Aquests 50 anys d'estudi s'han vist reflectits en un llibre, escrit per Thomson al 2019 [34]. És un recull de totes les regles de repartiment amb la seva caracterització. A més, hi trobem un apartat dedicat a la relació entre els problemes de repartiment i els jocs cooperatius, concretament, a les correspondències existents entre les regles i les solucions.

Amb l'objectiu d'explicar i caracterització dels problemes de repartiment distribuïm el treball en 5 parts diferenciades: en primer lloc uns preliminars on incloem tot el que necessitarem per al bon funcionament de l'estudi posterior. Seguidament, passem a presentar els problemes de repartiment i estudiarem les regles de repartiment més importants, seguint l'estil de Thomson (2019) [34].

La següent part del treball, serà la més important de totes, la caracterització de les regles de repartiment més importants, on amb un seguit de teoremes, quedaran marcades les propietats de cada regla. Un cop feta la caracterització, ens endinsem en la relació que existeix entre els problemes de repartiment i els jocs cooperatius, donarem un seguit de resultats per a relacionar les regles de repartiment amb les solucions donades en els jocs cooperatius.

Per acabar, analitzem un parell d'estudis duts a terme per acadèmics espanyols durant l'última dècada que analitzen problemes reals aplicant les normes dels problemes de repartiment. El primer que analitzem és el problema del repartiment del pressupost de sanitat entre les diferents branques. Per acabar, analitzem el problema del repartiment dels permisos d'emissions de CO_2 entre les diferents regions del planeta.

Capítol 2

Preliminars

En aquest capítol farem esment dels conceptes que necessitarem per a la confecció d'aquest treball. En primer lloc, tractarem conceptes de la Teoria de Jocs, especialment dels conceptes que corresponen als jocs cooperatius o jocs en forma coalicional.

La Teoria de Jocs va ser introduïda pel llibre de von Neumann i Morgenstern (1944) [36] per analitzar aquelles situacions on els agents que intervenen presenten interessos contraposats, i el resultat final depèn de l'actuació de cadascú. Es pot dir que és l'estudi de problemes de decisió multipersonals. Aquests tipus de problemes són els que apareixen freqüentment a l'economia.

2.1 Què és un joc?

Segons Gardner (1996) [13], els elements comuns a tots els jocs són els elements que els defineixen. Aquests elements comuns són *Jugadors* (els que participen al joc), *Regles* (que especifiquen l'ordre, las possibilitats, etc.), *Estratègies* (el que els diferents jugadors poden fer al joc) i el *Resultat*, que especifica què passa i què es valorat pels jugadors potser de maneres diferents.

Amb aquests elements Gardner (1996) [13] defineix, de forma poc formal què és un joc: Un *joc* és qualsevol situació regida per un seguit de regles amb un resultat precís, i caracteritzada per la interdependència estratègica. Els agents o jugadors duen a terme les seves estratègies i el resultat depèn de la interacció d'aquestes estratègies.

Els jugadors són èssers racionals que com hem dit, tenen preferències sobre els possibles resultats. Aquesta preferència vé donada per una funció d'utilitat.

La *Teoria de Jocs* és la branca que estudia els jocs, que es poden dividir en grans trets entre els *jocs no cooperatius* i els *jocs cooperatius.* Als primers, els jugadors no estan obligats per cap acord vinculant, i el concepte fonamental serà el d'equilibri de Nash (Nash 1950) [18], que ens permetrà analitzar les combinacions d'estratègies estables.

En canvi, els *jocs cooperatius* plantegen que la cooperació entre els jugadors es donarà, per una llei, contracte o costum, i el resultat on s'ha arribat vé donat. Nosaltres analitzarem jocs cooperatius, o jocs en forma coalicional, d'utilitat transferible, on hi ha un bé comú per a tothom (generalment els diners) que és el resultat de la cooperació. Ens preocuparem de com es pot trobar un repartiment del producte de la cooperació, i si aquest repartiment satisfà determinades propietats, en especial la seva estabilitat. Aquests seran els tipus de jocs amb els que ens centrarem, ja que el nostre objectiu és com relacionar els problemes de repartiment amb els jocs cooperatius.

2.2 Jocs cooperatius

Dins dels jocs cooperatius, a diferència del que passa als jocs no cooperatius, poden existir acords entre els jugadors, i la cooperació apareix dins de tants i tants aspectes de la vida, la Unió Europea n'és un exemple. A més dels aspectes qualitatius, cal esmentar els aspectes quantitatius que valorin i matisin aquesta cooperació necessària. Els acords entre els jugadors s'expressen mitjançant coalicions. Els jocs que estudiarem pressuposen que hi ha un bé perfectament divisible que els jugadors poden repartir-se i transferir lliurement entre ells. Pel que acabem d'esmentar, els jocs cooperatius s'anomenen també jocs coalicionals. Una introducció als jocs cooperatius es pot trobar a Rafels et al. (1999) [24].

Abans de donar una definició formal del que és un joc cooperatiu veiem un parell d'exemples de casos de la vida real en els que ens podem trobar un joc cooperatiu:

Exemple 2.1. La inversió: Un producte financer funciona de la següent manera, si es posa fins a 2000 € l'interès és del 5%, i si se'n posen més es guanya un 10%. Dues persones volen invertir. La primera té 1000 €, la segona en té 1500 €. És fàcil doncs observar que si inverteixen individualment la primera persona guanyarà 50 € i la segona 75 €, però si s'ajunten les dues i inverteixen juntes duplicaran la quantitat guanyada.

Exemple 2.2. Joc dels guants: Tenim 4 persones que tenen un guant cada una. Concretament, els jugadors 1 i 2 tindran un guant de la mà dreta i els jugadors 3 i 4 tindran un de la mà esquerra. Els quatre volen vendre el seu guant, però no ho poden fer individualment, per tant, el benefici individual de cadascú és 0, en canvi, si s'ajunten poden vendre els parells de guants i repartir-se els beneficis.

Un cop vists aquests exemples és el moment de donar la definició específica de *joc cooperatiu*:

Definició 2.3. Un *joc cooperatiu* és un parell (N, v) format per un conjunt finit $N = \{1, \ldots, n\}$, el grup de jugadors i una funció $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, on 2^N és el conjunt de les parts de N. Aquesta funció s'anomena *funció característica* i assigna un valor real a cada $S \subseteq N$ subconjunt de jugadors amb la condició que $v(\emptyset) = 0$.

Observem que cada subconjunt $S \subseteq N$ és una *coalició* que es pot formar, així com N serà la coalició de tots els jugadors. La funció v s'anomena *funció característica* i ens serveix per mesurar el que es guanya amb la coalició respecte de les altres. Per a simplificar la notació, a partir d'ara ens referirem a un joc cooperatiu com a v.

Des d'aquesta definició de joc cooperatiu, podem ara trobar com classificar alguns jocs coorperatius. Seguidament afegirem un seguit de propietats que ens ajudaran a diferenciar diferents grups de jocs cooperatius.

Definició 2.4. Un joc cooperatiu (N, v) es *monòton* si $v(S) \leq v(T)$ per qualsevol $S \subseteq T \subseteq N$.

El que ens diu aquesta propietat és que un joc cooperatiu monòton complirà que els guanys del conjunt d'una coalició seràn més grans com més gran sigui aquesta, és a dir, si tenim una coalició S i en aquesta s'hi afegeix el jugador $i \notin S$ els guanys de la coalició quedaran igual o augmentaran, però en cap cas disminuiran. Ens podem fixar que un joc monòton sempre pren valors positius, ja que $v(\emptyset) = 0$.

Definició 2.5. Un joc cooperatiu (N, v) és *convex* si es compleix que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ per tot $S, T \subseteq N$.

El que ens diu aquesta propietat és que un joc serà convex si compleix que la suma dels guanys de dues coalicions qualsevol és més petita o igual que la suma dels guanys de la unió i la intersecció de les dues.

Si i és un jugador que no pertany a la coalició S, l'increment $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ mesura la contribució de i a la coalició S. Es pot demostrar que la convexitat té la propietat de la *bola* *de neu (snowball effect)*, on la contribució marginal d'un jugador a una coalició és més gran (o almenys no decreix) contra més jugadors hi hagi a la coalició. Aquesta condició es pot escriure de la següent manera:

Per tot $i \in N$ i tot $S, T \subseteq N$ tal que $S \subseteq T \subset N \setminus \{i\}$ es compleix que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Una altra propietat és la superadditivitat, la qual implica que el guany obtingut per la unió de dues coalicions disjuntes és major o igual que la de cadascuna per separat.

Definició 2.6. Un joc cooperatiu (N, v) es *superadditiu* si $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)$ per tot $S, T \subseteq N$ tals que $S \cap T = \emptyset$.

La propietat de superadditivitat ens diu que si tenim dues coalicions les quals no tenen cap jugador en comú, llavors la suma dels guanys de les dues per separat sempre serà igual o menor als guanys que tenen les dues coalicions juntes. En un joc superadditiu els jugadors tenen incentius per cooperar ja que la unió de dos grups qualssevol disjunts, mai disminuex els guanys.

Observem que si un joc és convex implicarà que és superadditiu, ja que la convexitat és una extensió de la superadditivitat.

Si no hi ha confusió i el conjunt de jugadors està prefixat, escriurem v en lloc del joc cooperatiu (N, v).

2.3 Solucions pels jocs cooperatius

Hem vist que un joc cooperatiu vé definit per la seva funció característica, però el que ens interessarà serà com repartir el que es guanya amb la cooperació entre els jugadors, és a dir $v(N)$. I això es pot fer de moltes maneres. Per resoldre aquest afer, al llarg del temps s'han generat diverses formes de trobar la solució a un joc cooperatiu. Dels repartiments possibles, ens preocuparà que siguin acceptables per tots els jugadors.

En general, una solució d'un joc cooperatiu és una regla d'assignació que assigna a cada jugador una quantitat, seguint uns paràmetres preestablerts. D'aquestes solucions n'hi ha de dos tipus: les que donen un conjunt de possibles repartiments i les que en donen una única solució. L'avantatge del primer grup és que sovint són més fàcils de trobar, però després s'haurà de definir quina és la solució ideal en el conjunt. Pel que fa a la segona, sovint és més difícil de trobar.

Donat (N, v) un joc cooperatiu de n jugadors, el total a repartir és $v(N)$, i cada repartiment vé donat per un vector $x \in \mathbb{R}^N$. Demanem que aquest repartiment compleixi el principi d'*eficiència*:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

on x_i és la quantitat que rep el jugador $i \in N$. Si $x \in \mathbb{R}^N$, i $S \subseteq N$ denotarem per $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. La suma sobre el conjunt buit és zero.

Els vectors $x \in \mathbb{R}^n$ tals que compleixen la propietat anterior s'anomenen vectors de pagament eficients pel joc v. Els anomenarem *imputacions* del joc v si a més compleixen el *principi de racionalitat individual*, que ens diu que cada jugador ha de rebre com a mínim el que reclama individualment. Aquest conjunt d'imputacions el denotarem com $I(v)$:

$$I(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \;\text{ i }\; x_i \geq v(\{i\}) \text{ per tot } i \in N \right\}.$$

El *Core*

Un dels primers conceptes de solució que es van definir va ser el core, definit per primer cop per Gillies (1959)[14]. Fa servir la idea de la dominació entre imputacions que seguidament definirem i ens diu que una imputacio té sentit només si no és dominada per cap altra.

Definició 2.7. Sigui (N, v) un joc cooperatiu i $x, y \in I(v)$. Direm que x domina a y (x *dom* y) si existeix una coalició $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ tal que $x_i > y_i$, per tot $i \in S$ i $x(S) \leq v(S)$.

Gillies (1959)[14] defineix el core d'un joc cooperatiu com el conjunt d'imputacions que no són dominades. Prova també que la definició, basada en la dominació, és equivalent a la següent definició:

Definició 2.8. Per qualsevol joc (N, v), el *core* del joc, $C(v)$, és definit per:

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N) \text{ i } x(S) \geq v(S), \text{ per tot } S \neq \emptyset, N \right\}.$$

De la definició es dedueix que els punts del *core* satisfan l'eficiència, la racionalitat individual, i la racionalitat coalicional, ja que cap coalició rep menys que el que pot aconseguir per ella mateixa. Observem que el *core* és un conjunt convex i és tancat, ja que és la intersecció de conjunts convexos i tancats. Pot tenir una o moltes imputacions, però en alguns jocs el core pot ser buit.

Cal destacar que per evitar els casos on el core del joc pot ser buit, es pot definir una variant del *core* on les desigualtats que el defineixen estan modificades, el ε-*core*:

Definició 2.9. Per qualsevol (N, v), i $\varepsilon \in \mathbb{R}$, el ε-core $C_\varepsilon(v)$ ve donat per

$$C_\varepsilon(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N) \text{ i } x(S) \geq v(S) - \varepsilon, \text{ per tot } S \neq \emptyset, N \right\}.$$

El valor de Shapley

El valor de Shapley (Shapley, 1953) [28] és un concepte de solució puntual que assigna a cada joc un únic vector de pagaments. Per la seva definició necessitarem unes nocions prèvies. Primer donarem una definició basada en uns axiomes i després donarem una fórmula pel seu càlcul.

En primer lloc definim el joc permutat, és a dir modificat per una permutació.

Definició 2.10. Sigui (N, v) un joc cooperatiu de n jugadors y π una permutació sobre N. El joc $(N, \pi v)$ es aquell on la funció característica per cada coalició $S = \{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq N$, està definida per:

$$(\pi v)(S) = v(\pi(S)) = v(\{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_s)\}).$$

Aquesta definició és fonamenta en com varia el joc quan canviem els noms del jugadors.

Definició 2.11. Un conjunt $K \subseteq N$ és suport del joc (N, v) si $v(S) = v(S \cap K)$ per tota coalició $S \subseteq N$.

El suport d'un joc indica quins jugadors són actius al joc, és a dir que la seva presència és la que permet donar valor al joc.

Ara donarem una definició del valor de Shapley basada en les propietats com a aplicació lineal sobre l'espai vectorial dels jocs amb el mateix conjunt de jugadors.

Anomenem G^N a l'espai vectorial dels jocs cooperatius sobre el mateix conjunt de jugadors, N, amb la suma de jocs i el producte per un escalar. Noteu que es tracta d'un espai vectorial de dimensió finita.

El valor de Shapley és una aplicació:

$$\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que assigna a cada joc cooperatiu (N, v) un vector

$$\phi(N, v) = \big(\phi_1(N, v), \ldots, \phi_n(N, v)\big) \in \mathbb{R}^N$$

i que compleix les següents propietats.

i). Si $K \subseteq N$ és un suport del joc (N, v), llavors $\sum_{i \in K} \phi_i(N, v) = v(K)$.

ii). Per tot joc (N, v) i tota permutació π de N es compleix $\phi_{\pi(i)}(N, \pi v) = \phi_i(N, v)$.

iii). Si $u, v \in G_N$ llavors $\phi(N, u + v) = \phi(N, u) + \phi(N, v)$.

Teorema (Shapley, 1953): Existeix una única funció $\phi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que satisfà les 3 propietats anteriors i està donada per:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right] \text{ per cada } i \in N,$$

on $s = |S|$ i $n = |N|$.

Hi ha moltes caracteritzacions axiomàtiques del valor de Shapley i la literatura sobre el tema és molt extensa. Hi ha diferents axiomàtiques, extensions i aplicacions molt naturals, que proporcionen fórmules més senzilles. Un recull interessant de treballs sobre el valor de Shapley és Roth (1988) [26]. La concessió del Premi Nobel d'Economia el 2012 a Lloyd S. Shapley (junt amb Alvin E. Roth) *for the theory of stable allocations and the practice of market design,* va fer que es publiquessin noves aportacions.

Observem que el pagament del valor de Shapley assignat a cada jugador $i \in N$ és una mitjana de les contribucions marginals del jugador en les coalicions a les que pertany. Aquestes són $[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$ on $S \subseteq N, i \in S$.

A més, el valor de Shapley compleix la propietat del jugador fals i simètric. En el joc (N, v) un jugador és *fals* si $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ per tot $S \subseteq N \setminus \{i\}$. I una solució compleix la propietat del jugador fals si tot jugador fals rep per la solució exactament el seu valor individual. Pel que fa a la segona propietat, dos jugadors i i j són *simètrics* si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ per tot $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. I una solució compleix la propietat dels jugadors simètrics si dóna exactament el mateix pagament als jugadors simètrics. En particular, si $i, j \in N$ són jugadors simètrics en el joc (N, v), llavors $\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v)$.

En general, el valor de Shapley no pertany al *core* i ni tan sols ha de ser una imputació. És fàcil demostrar que si el joc (N, v) és superadditiu, llavors el valor de Shapley és una imputació, $\phi(N, v) \in I(v)$. Si el joc és convex, llavors el valor de Shapley pertany al *core,* és a dir $\phi(N, v) \in C(v)$.

El nucleolus i el *kernel*

El nucleolus va ser introduït per primer cop per Schmeidler al 1969 (Schmeidler, 1969) [27] i es tracta d'una solució puntual. Es tracta d'un punt que pertany al conjunt d'imputacions i si el *core* és no buit, selecciona un punt del *core.* Aquest concepte es basa en la idea d'excés d'una coalició front un repartiment eficient (preimputació).

Definició 2.12. Sigui (N, v) un joc cooperatiu de N jugadors, $x \in \mathbb{R}^N$ un repartiment eficient i $S \subset N$. L'excés de la coalició S respecte el valor x al joc (N, v) ve definit per

$$e^v(S, x) = v(S) - x(S).$$

En el cas de ser positiu l'excés representa el guany de la coalició S si els seus membres abandonen el vector de pagament x, i per tant planteja una situació d'inestabilitat. Noteu que els membres de la coalició S reben menys del que obtindrien pel valor de la seva coalició.

Si l'excés és negatiu representa les pèrdues en la mateixa situació, és a dir, l'excés ens mostra si als membres de S els surt a compte o no abandonar un vector de pagament.

Observeu que aquest excés sempre és zero tant per la coalició total com per la coalició buida.

Anem a definir el *kernel* d'un joc cooperatiu (Davis i Maschler, 1965) [8]. El següent element ens servirà per comparar entre dos jugadors quin és el que té més pes en una coalició respecte el vector de pagaments:

Definició 2.13. Sigui $v \in G^N$ i una preimputació $x \in \mathbb{R}^N$. El *màxim excedent* del jugador $i \in N$ sobre un altre jugador $j \in N$ respecte a la preimputació x a v ve donat per

$$s^v_{ij}(x) = \max\{e^v(S,x) : S \in \Gamma_{ij}\},$$

on $\Gamma_{ij} = \{S \subseteq N \setminus \{j\}, i \in S\}$.

Per tant, si $x_j > v(\{j\})$ i $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$, el jugador i pesa més que el jugador j respecte la imputació $x \in I(v)$.

El *kernel* es defineix com el conjunt de totes les imputacions on cap jugador pesa més que un altre, és a dir, cap jugador té més poder que un altre i per tant cap jugador es pot sentir amenaçat. Formalment:

Definició 2.14. Sigui $v \in G^N$. El *kernel* $K(v)$ del joc v és el conjunt de totes les imputacions $x \in I(v)$ que satisfan que per tot $i, j \in N$, $i \neq j$

$$(s^v_{ij}(x) - s^v_{ji}(x))(x_j - v(\{j\})) \leq 0 \quad \text{i} \quad (s^v_{ji}(x) - s^v_{ij}(x))(x_i - v(\{i\})) \leq 0$$

El *kernel* és un conjunt que pot tenir més d'un punt, i que en general no és fàcil de trobar. Sempre conté el nucleolus que es definirà tot seguit.

El nucleolus

El nucleolus va ser definit per Schmeidler (1969) [27] en demostrar que el *kernel* $K(v)$ d'un joc (N,v) sempre intersecta amb qualsevol conjunt no buit de $C_\varepsilon(v) \cap I(v)$.

En primer lloc introduïm unes nocions prèvies basant-nos amb la definició d'excés ja esmentada prèviament.

Sigui (N,v) un joc cooperatiu. Llavors per qualsevol preimputació (repartiment eficient) $x \in \mathbb{R}^N$ amb $x(N) = v(N)$, considerem el vector format pels excessos respecte totes les coalicions, és a dir el vector les components del qual són $e^v(S,x), S \subseteq N$. Recordem que $e^v(S,x) = v(S) - x(S)$. Es tracta d'un vector que té 2^n components.

Definim ara el vector $\theta^v(x)$, una 2^n-upla la qual les seves components són els excessos $e^v(S,x), S \subseteq N$ disposats en ordre no creixent: $\theta^v_i(x) \geq \theta^v_j(x)$ sempre que $1 \leq i \leq j \leq 2^n$. Observeu que per construcció, per a qualsevol vector $x \in \mathbb{R}^N$ tenim $e^v(\emptyset, x) = 0$ i que si el vector és eficient $e^v(N,x) = 0$. Si el *core* del joc és no buit, els excessos corresponents als punts del *core* seran tots no negatius i el vector $\theta^v(x), x \in \mathbb{R}^N$ és interpretat com a vector de reclamació.

Farem servir l'ordre lexicogràfic $\leq_L$ per comparar i ordenar els vectors de reclamació tenint en compte la reclamació més gran, o si aquesta és igual, la seva segona reclamació i així successivament. L'ordre lexicogràfic és el que es fa servir per ordenar les paraules a un diccionari. El subíndex L afegit al signe de desigualtat indica que fem servir aquest ordre.

Per tot $x, y \in \mathbb{R}^N$, l'*ordre lexicogràfic* està definit de la següent manera:

i). $\theta^v(x) <_L \theta^v(y)$ si existeix un enter $1 \leq k \leq 2^n$ tal que $\theta^v_i(x) = \theta^v_i(y)$ per $1 \leq i \leq k-1$, mentre que $\theta^v_k(x) < \theta^v_k(y)$.

ii). $\theta^v(x) \leq_L \theta^v(y)$ si $\theta^v(x) = \theta^v(y)$ o $\theta^v(x) < \theta^v(y)$.

El fet de que els vectors de reclamació es comparin per ordre lexicogràfic, indica que estem donant més importància a les coalicions amb un excés major, és a dir, els jugadors que més perdran si abandonen la coalició.

Definició 2.15. El *nucleolus* $\eta(v)$ d'un joc (N, v) és el conjunt de totes les imputacions $x \in I(v)$ que minimitzen els vectors de reclamació dins del conjunt de les imputacions:

$$\theta^v(x) \leq_L \theta^v(y), \quad \text{per tot } y \in I(v).$$

Per tant, les imputacions que inclou el nucleolus seràn les que minimitzen els seus vectors de reclamació $\theta^v(x)$. Per tant, inclou les imputacions les quals ofereixen un repartiment entre els membres de la coalició de forma que el grau de conformitat dels membres sigui el major possible. Després de la definició, Schmeidler prova el següent teorema.

Teorema. *El* nucleolus $\eta(v)$ *d'un joc* (N, v) *consisteix en un sol punt.*

La caracterització geomètrica del nucleolus indica que està sempre contingut en la intersecció no buida de qualsevol ε-core amb el conjunt d'imputacions, per tant, formalment, $\eta(v) \in C_\varepsilon(v) \cap I(v)$ sempre que $C_\varepsilon(v) \cap I(v) \neq \emptyset$. El càlcul del nucleolus en general està basat en la resolució de una sèrie de programes lineals, però la seva complexitat computacional és gran. Vegeu Greco et al. (2015) [16].

En particular $\eta(v) \in C(v)$ sempre que $C(v) \neq \emptyset$.

Teorema. *El nucleolus de qualsevol joc pertany al kernel,* $\eta(v) \in K(v)$ *per tot* $v \in G^N$.

El valor τ

El valor τ d'un joc cooperatiu va ser definit per primer cop per Tijs (1981)[35]. Es tracta d'un valor de compromís i no està definit per tots els jocs sinó només pels que compleixen unes determinades desigualtats. L'obtindrem identificant primer els pagaments mínims i màxims naturals de cada jugador. En primer lloc es defineix el vector d'utopia, el dels pagaments màxims que els jugadors poden esperar:

Definició 2.16. Anomenem *vector de pagaments màxims* naturals d'un joc (N, v) al vector que ve donat per la següent fórmula:

$$M_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\})$$

per cada $i \in N$.

El vector d'utopia és $M(v) = \big(M_1(v), M_2(v), \ldots, M_n(v)\big) \in \mathbb{R}^N$.

Observeu que el màxim natural d'un jugador és el que queda quan la coalició formada per la resta de jugadors rep el seu valor. Un cop definits els pagaments màxims, podem definir què són els pagaments mínims.

Definició 2.17. Anomenem *vector de pagaments mínims* naturals d'un joc (N, v) al vector que ve donat per la següent fórmula,

$$m_i(v) = \max_{S \subseteq N, i \in S} \left(v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(v) \right)$$

per cada $i \in N$.

El vector de pagaments mínims és $m(v) = \big(m_1(v), m_2(v), \ldots, m_n(v)\big) \in \mathbb{R}^N$.

Un cop tenim aquest dos vectors, triant el punt eficient (tal que les seves coordenades sumen el valor de la coalició total) entre els dos trobem el valor de τ.

Definició 2.18. Donat un joc (N, v), siguin $M(v)$ i $m(v)$ el vectors de pagaments màxims i mínims naturals respectivament. El *valor de* τ, $\tau(v)$, és el vector eficient dins del segment que els uneix:

$$\tau(v) = \lambda M(v) + (1 - \lambda)m(v),$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$ és triada per a que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau_i(v) = v(N)$.

El valor de τ només està definit per els jocs anomenats quasi-equilibrats. Un joc (N, v) és quasi-equilibrat si compleix dues condicions:

$$M(v) \geq m(v) \quad \text{i} \quad \sum_{j\in N} M_j(v) \geq v(N) \geq \sum_{j\in N} m_j(v).$$

La solució Dutta-Ray

La solució Dutta-Ray (Dutta i Ray, 1989) [12] és una regla de selecció del *core* que es relaciona amb un criteri d'equitat. A diferència del nucleolus, la solució Dutta-Ray és monòtona en la població i monòtona en els valors de les coalicions en els jocs convexos. Abans de definir-la necessitem definir la utilitat d'una solució.

Definició 2.19. Donat un joc cooperatiu (N, v) definim la utilitat de un vector eficient $x \in \mathbb{R}^n$ com $u(x) = \displaystyle\sum_{i\in N} u_i(x_i)$ on $\sum x_i = v(N)$. Aquestes funcions $u_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són còncaves i diferenciables.

Es fa servir la funció d'utilitat encara que en la seva formulació original el que es fa és buscar un repartiment que domini en el sentit de Lorenz. La dominació en el sentit de Lorenz per vectors la suma de les seves components és constant és semblant a l'ordre lexicogràfic en el sentit que en primer lloc els vectors s'ordenen de forma decreixent, i per comparar-los es van sumant les components així ordenades.

La solució de Dutta-Ray pot no existir en general o si existeix pot no ser un punt del *core*. Però pels joc convexes consisteix en un vector únic que hi és dins del core.

Definició 2.20. Donat un joc cooperatiu (N, v) convex i u_i la funció que determina la utilitat. La *solució Dutta-Ray* és

$$DR(v) = \arg \max_{x\in C(v)} \left(\sum_{i\in N} u_i(x_i) \right).$$

Per tant, la solució Dutta-Ray serà el vector pertanyent al *core* que tingui una utilitat més alta. Així doncs, observem que la solució Dutta-Ray d'un joc cooperatiu convex està composta per un únic punt.

Capítol 3

El problema de repartiment i les regles

Els problemes de repartiment sempre han estat importants per a nosaltres, ja que constantment ens trobem en situacions on sense saber-ho els estem implementant, com pot ser el cas del repartiment d'una pizza a l'hora de sopar o la manera de repartir les beques o subvencions a estudiants o empreses. Com ho fan per a decidir quin ha de ser l'ordre i la quantitat que s'ha de repartir a cadascú?

Doncs bé, aquestes situacions s'anomenen problemes de repartiment, ja que disposem d'una certa quantitat d'un bé que s'ha de repartir, però no n'hi ha prou per a satisfer la demanda de tota la població. Els problemes que tractarem són els que tracten de la divisió d'un bé homogeni i perfectament divisible, com els diners o l'aigua, sobre el qual els agents tenen demandes (que suposem ben justificades). És possible analitzar situacions on el bé a dividir és no homogeni, com una pizza amb diferents ingredients, o bé amb indivisibilitats, com cases o places a la universitat, però les eines per fer-ho són diferents. Com veurem, hi ha diferents respostes a aquests problemes, ja que depenen del punt de vista que ens ho mirem. Això fa que siguin molt interessants i que diferents experts els hagin estudiat al llarg de la història.

En aquest capítol, primerament, donem una definició matemàtica del que són el problemes de repartiment i especialment els problemes de bancarrota. Analitzem les característiques d'aquests i tot seguim passem a descriure el que és l'objecte del treball: com repartir?

Existeixen diverses regles de repartiment, però ens centrarem en primer lloc en les 4 regles bàsiques dels problemes de repartiment. Aquestes regles són la regla proporcional, la d'igualtat en pèrdues, la d'igualtat en guanys i la regla del Talmud. Veiem algunes propietats de les regles i que posteriorment serveixen per caracteritzar-les. Passem després a descriure altres regles, algunes ben antigues.

3.1 Què són els problemes de repartiment?

Els problemes de repartiment apareixen en un estudi fet per O'Neill (1982) [20] amb l'objectiu d'estudiar les situacions en les que disposem d'una certa quantitat d'un bé que s'ha de repartir, però no n'hi ha prou per a satisfer tota la demanda dels agents involucrats. Tenim la divisió d'un bé homogeni i perfectament divisible, com els diners o l'aigua, sobre el qual els agents tenen demandes (que suposem ben justificades).

Definició 3.1. Un *problema de repartiment* és un parell $(E, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^N$ que compleix que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \geq E.$$

El valor $E \in \mathbb{R}_+$ és el total a repartir, i el vector $c \in \mathbb{R}_+^N$ és el vector de demandes.

El valor $E \in \mathbb{R}_+$ (*Estate*) és el capital a repartir entre el conjunt d'agents, que formen el conjunt (finit) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, i el vector $c \in \mathbb{R}_+^N$ serà el vector de les demandes (*claims*) $c_i, i \in N$ dels agents implicats en el problema.

Denotarem $\mathbb{B}^N$ al *conjunt de problemes de repartiment* (E, c) que tenen el mateix conjunt d'agents N, és a dir amb n agents. El conjunt de tots els problemes de repartiment on el conjunt d'agents pot ser qualsevol el denotem per $\mathbb{B}$. Si cal un problema de repartiment on volem concretar el conjunt d'agents el denotarem per $(N, E, c) \in \mathbb{B}$.

Seguidament exposem 2 exemples sobre problemes de repartiment.

Exemple 3.2. Una empresa no pot fer front als seus deutes i fa fallida. Ha de tancar per bancarrota. Aquesta disposa d'un capital E =10000 €. L'empresa té 4 creditors, les demandes dels quals són: $c_1 = 5000$ €, $c_2 = 4000$ €, $c_3 = 3000$ € i $c_4 = 2000$ €. Observem que aquest exemple és un problema de repartiment, ja que $\sum_{i=1}^{4} c_i > E$. Per tant, quin repartiment s'utilitzarà per l'empresa per fer front als seus deutes?

Doncs un repartiment que pot fer servir serà: $x_1 = 4000$ €, $x_2 = 3000$ €, $x_3 = 2000$ € i $x_4 = 1000$ €. Observem que és un repartiment raonable, ja que $\sum_{i=1}^{4} x_i = E$ i a més, cap creditor rep més del que demana.

Exemple 3.3. Un home mor deixant una fortuna de 4000 € a repartir entre tres germans, a qui ha promès diferents quantitats. Cada un demana una quantitat: $c_1 = 4000$ €, $c_2 = 4000$ € i $c_3 = 3000$ €. Obviament veiem que és un problema de repartiment, ja que $\sum_{i=1}^{3} c_i > 4000$ €.

Un repartiment que podriem fer seria el següent: $x_1 = x_2 = 1500$ € i $x_3 = 1000$ €. És un bon repartiment, ja que la suma de les quantitats és igual al capital disponible i a més, cap creditor rep més del que demana.

¿Com es pot fer per arribar a aquestes solucions de manera lògica i raonada? Hem emprat el que s'anomenen regles de repartiment. Cada regla és una funció que aplicada al problema en qüestió ens donarà una solució determinada i possible. Cal destacar que de vegades (especialment amb problemes petits) dues regles diferents poden portar a la mateixa solució.

Definició 3.4. Una *regla de repartiment* és una funció $f : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que assigna a cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ una solució $f(E, c) = (f_1(E, c), \ldots, f_n(E, c)) \in \mathbb{R}^N$ que compleix:

i). Racionalitat individual: $f_i(E, c) \geq 0$ per cada $i \in N$.

ii). Eficiència: $\sum_{i=1}^{n} f_i(E, c) = E$.

Generalment una regla F està definida per qualsevol conjunt N d'agents, és a dir, està definida al conjunt $\mathbb{B}$, de forma que no especifiquem en la seva definició quin és el conjunt d'agents.

Un cop definit el marc general de les regles de repartiment, anem en la propera secció a destacar les regles més importants.

3.2 Els 3 mosqueters, que són quatre

El títol d'aquesta secció està manllevat d'un article de Herrero i Villar (2001)[17], on es fa un repàs a les regles. Com tothom sap, el famós llibre de *Els tres mosqueters* d'Alexandre Dumas tracta de 4 personatges, Athos, Porthos, Aramis i D'Artagnan. Tres personatges són autèntics mosqueters i el darrer és simplement un aspirant.

Hi ha quatre regles que són les més habituals per a la resolució dels problemes de repartiment. Com veurem hi ha 3 regles que s'assemblen entre elles i comparteixen moltes propietats. A més, n'hi ha una que es diferencia de les altres i té un definició i mètode de càlcul una mica més especial. Les comparem fent ús del mateix exemple.

Exemple 3.5. Una entitat té un capital $E \in \mathbb{R}_+$ per repartir en subvencions entre dues associacions exactament iguals. Cada una d'elles reclama una subvenció diferent, que és $c_1 = 250$ € i $c_2 = 400$ €. Segons el capital disponible, quines són les opcions de l'entitat per a repartir-ho entre les dues associacions?

Analitzarem les diferents regles fent servir aquest mateix Exemple 3.5, i assignant x_1 i x_2 com a solucions respectives a les dues associacions. En el gràfic, en l'eix de les abscisses tindrem els valors corresponents a la solució x_1 i en l'eix de les ordenades tindrem les solucions corresponents a x_2.

Analitzarem l'exemple amb 4 regles diferents:

i). La regla proporcional.

ii). La regla d'igualtat en guanys.

iii). La regla d'igualtat en pèrdues.

iv). La regla del Talmud.

Regla proporcional

Probablement sigui la regla que a tothom li ve a la ment en el moment que se li planteja un problema de repartiment. Es podria veure com la regla més justa, ja que reparteix el capital en parts proporcionals a les quantitats demanades, és a dir, segueix la idea d'igualtat proporcional.

Regla proporcional, P: Per cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, la *regla proporcional* és

$$P(E, c) = \lambda \cdot c,$$

on $\lambda \in [0, 1]$ es triada per a que compleixi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda\, c_i = E$.

L'expressió concreta de λ és $\lambda = \dfrac{E}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$.

Analitzem l'Exemple 3.5 segons el capital E a repartir: La fórmula la qual ha de complir λ és la següent: $250\lambda + 400\lambda = E$, per tant, $\lambda = \dfrac{E}{650}$. Observem que λ segueix una recta de pendent $\dfrac{1}{650}$. Per tant, anirà augmentant de forma constant a mida que el capital E augmenti, i la gràfica de la regla proporcional de dos jugadors serà una recta en la que quan $E = 0,\ x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ i quan $E = c_1 + c_2,\ x_1 = c_1$ i $x_2 = c_2$.

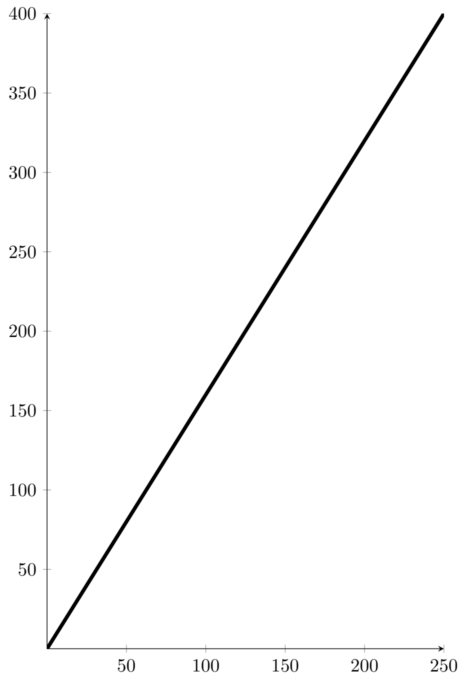

Figura 3.1: Regla proporcional en l'Exemple 3.5

Igualtat en guanys

Pel que fa a la regla d'igualtat en guanys, té com a principi motor ser el més igualitari possible, sense donar més que el que un demandant hagi demanat. Seguint la regla de que cap demandant ha de rebre més que la seva demanda, aquesta regla repartirà el capital de forma que tothom rebi el mateix. Per tant, tothom hauria de rebre $\frac{E}{n}$, si fós possible.

Ara bé, si hi ha un primer demandant $i \in N$ tal que $c_i < \frac{E}{n}$ es repartirà el sobrant entre els restants, i així successivament. No és gens difícil observar que aquesta regla beneficiarà sempre als demandants més petits, és a dir, als agents que tenen demandes més petites, ja que seran les primeres a ser satisfetes.

Regla d'Igualtat en guanys, CEA (*Contrained Equal Awards rule*): Per cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$CEA_i(E, c) = \min\{c_i, \lambda\},$$

on λ és triada per a que compleixi $\sum_{j=1}^{n} \min\{c_j, \lambda\} = E$.

Analitzem l'Exemple 3.5 segons el capital E a repartir: podem observar que el vector de solucions serà de la forma $x = (\lambda, \lambda)$ fins que $E = 500$ que és el doble del que demana el demandant 1. Per a veure quin valor té λ hem de veure com està definida: $\sum_{i=1}^{n} \min\{c_j, \lambda\} = E$ es pot veure fàcilment que $\lambda = \frac{E}{2}$, si $E \in [0, 500]$

Per $E \in (500, 650]$ observem que $\lambda = E - c_1$, per tant, el vector de la solució serà diferent, ja que $\frac{E}{2} > c_1$ amb aquestes dues propietats arribem a que $x_1 = c_1$ i $x_2 = \lambda$. En la gràfica doncs observem que en el punt crític $(250, 250)$ és el moment en el que s'arriba al valor de la demanda del primer jugador.

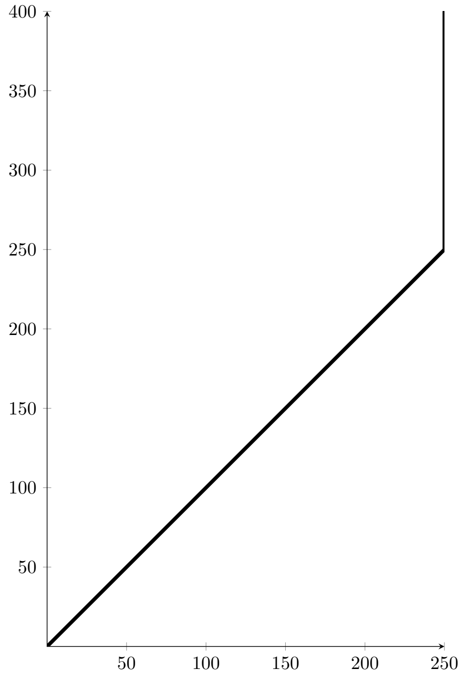

Figura 3.2: Regla d'igualtat en guanys en l'Exemple 3.5

Igualtat en pèrdues

Aquesta regla, formalitzada per Aumann i Maschler al 1985 [2] igual que l'anterior, també es focalitza en la idea d'igualtat. Aquest cop però, com bé diu el seu nom, intenta que les pèrdues siguin exactament iguals per a tots dins del possible. Si com abans, amb n agents tothom rebés $\frac{E}{n}$, és evident que els demandants amb demandes més altes perdrien una quantitat més elevada que els petits demandants. El capital es repartirà de forma que tothom perdi el mateix. Seguint aquesta llei, és fàcil veure que aquesta regla beneficiarà a les grans demandes, ja que per aconseguir que tothom perdi el mateix donarà més a les demandes més altes que a les petites.

Regla d'Igualtat en pèrdues, CEL (*Constrained Equal Losses rule*): Per cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$CEL_i(E, c) = \max\{0, c_i - \lambda\},$$

on λ es triada per a que es compleixi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \max\{0, c_i - \lambda\} = E$.

Anem a analitzar l'exemple 3.5 anterior aplicant la regla d'igualtat en pèrdues segons el capital E. Observem que si $E \in [0, 150]$ el vector solució serà $x = (0, E)$. En efecte, si observem les pèrdues de cada jugador, que anomenem p_1 i p_2, observem que $p_2 > p_1$ fins a $E = 150$. Pel que fa al valor de λ observem que és $\lambda = c_2 - E$.

Per $E \in (150, 650]$ observem que ja podem igualar p_1 i p_2 per tant, com que $c_i - \lambda > 0$ per tot $i \in N$ i per tot $E \in (150, 650]$ el màxim es troba a $c_i - \lambda$ i $CEL_i(E, c) = c_i - \lambda$. El valor de satisfà $250 - \lambda + 400 - \lambda = E$, i per tant $\lambda = \frac{650 - E}{2}$.

Així doncs, a partir del punt crític $(0, 150)$ la variable λ decreix de forma constant, per tant, la nostra gràfica representarà una recta fins al punt $(250, 400)$ on s'arriba a complir la demanda dels dos jugadors amb el capital $E = 650$.

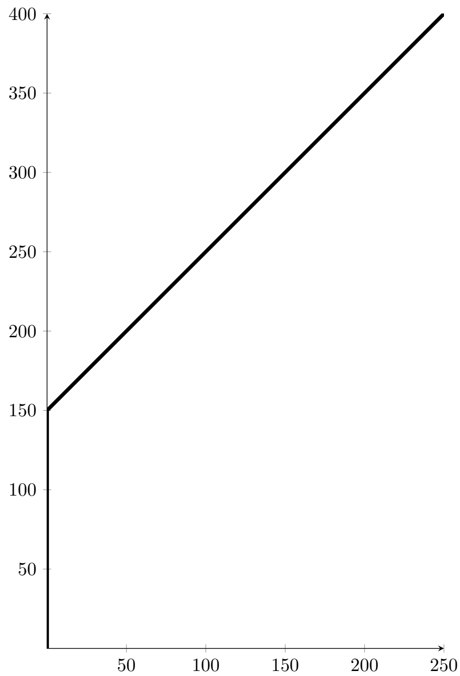

Figura 3.3: Regla d'igualtat en pèrdues en l'Exemple 3.5

És fàcil observar que la regla *dual* de la igualtat en guanys és la igualtat en pèrdues, i al contrari. Es diu que són regles duals, i això queda reflectit a les gràfiques corresponents.

Regla del Talmud

Dins de la religió i tradició jueva, es coneix com el Talmud a l'obra que recull la recopilació de la tradició oral jueva així com les principals lleis i disertacions dels rabins sobre diferents temes com les lleis, tradicions, costums i narracions. Un inmens codi civíl elaborat entre el segle III i el V per estudiosos hebreus de Babilònia i Eretz Israel.

Existeixen dues conegudes versions del Talmud, el de Jerusalem, que es va redactar a la província romana de Filistea, i el Talmud de Babilònia, redactat a Mesopotamia. A més de les ja anomenades, el Talmud també contenia un seguit de contractes, compres i vendes, les quals són resoltes pel que ara anomenem problemes de repartiment. Són molts estudiosos i científics els que han estudiat i donat diferents textos explicatius sobre el Talmud, en concret els primers a estudiar aquests contractes van ser Aumann i Maschler al 1985 [2].

Aquesta regla també aplica el criteri de la igualtat, però distingeix quin criteri d'igualtat s'aplica depenent de les demandes respecte de la quantitat a repartir. Per tant és una barreja de les dues regles anteriors. Quan el capital és petit s'aplicarà la regla d'igualtat en guanys en la meitat de les demandes. Per altre banda, quan el capital és més gran, s'aplicarà la regla de la igualtat en pèrdues on igual que anteriorment, s'aplicarà per la meitat de les demandes.

Dit formalment, si la meitat del total de les demandes és igual a E, tothom rebrà la meitat de la seva demanda. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} > E$ s'aplicarà la regla de la igualtat en guanys, en canvi si és a l'inrevés, s'aplicarà la regla de la igualtat en pèrdues.

Així doncs, observem que en aplicar les dues regles al mateix temps, beneficiarà als demandants intermedis.

Regla del Talmud, T: Per cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$T_i(E,c) = \begin{cases} \dfrac{c_i}{2} & \text{si } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} = E, \\ \min\{c_i/2, \lambda\} & \text{si } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} > E, \text{ on } \lambda \text{ és triada per a que es compleixi} \\ & \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \min\{c_i, \lambda\} = E, \\ c_i - \min\{c_i/2, \lambda\} & \text{si } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} < E, \text{ on } \lambda \text{ és triada per a que es compleixi} \\ & \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [c_i - \min\{c_i/2, \lambda\}] = E. \end{cases}$$

Analitzem l'Exemple 3.5 anterior aplicant la regla de repartiment del Talmud: aplicarem la regla d'igualtat en guanys fins que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} = E$. Per tant, per a $E \in [0, 250)$ el vector de solució serà $x = \{x_1, x_2\}$ on $x_1 = x_2 = \dfrac{E}{2}$ com bé hem vist en l'igualtat en guanys.

En el punt on $\dfrac{E}{2} > \dfrac{c_1}{2}$ és a dir, on $E = 250$ obtenim que la solució x_1 és mantindrà fins que $x_2 = \dfrac{c_2}{2}$, per tant quan $E \in (250, 325)$ la solució és una recta vertical.

Ara bé observem que si en aquest punt apliquem la igualtat en pèrdues observem que c_2 encara perdrà més que c_1, això fa, que la gràfica de la funció continui sent una recta vertical fins a $E = 500$ on $x = (125, 375)$. Un cop arribats aquest punt, aplicant la regla de la igualtat en pèrdues, observem que la funció tornarà a crèixer amb pendent 1 fins a arribar a $E = 650$ on $x = (250, 400)$.

Essencialment, la regla del Talmud es comporta com d'igualtat en guanys amb demandes que són la meitat de les demandes i un capital fins aquest valor, i com d'igualtat en pèrdues començant que es proporciona la meitat de les demandes als creditors i la resta es reparteix segons la igualtat en pèrdues per la meitat de les demandes amb la resta del capital. A la gràfica es pot veure aquest comportament.

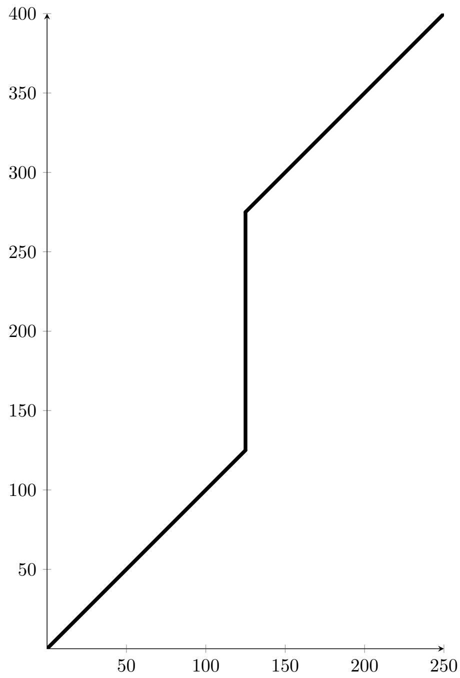

Figura 3.4: Regla del Talmud en l'Exemple 3.5

3.3 Altres regles de repartiment

Un cop vistes les 4 regles més importants del repartiment, veiem altres regles, no tant conegudes, però que també tenen el seu interès. Concretament, veurem la regla de Piniles, la igualitària, la *Run to the bank* i la mínima superposició.

Regla de Piniles

Aquesta regla apareix aplicada a problemes de comunitats jueves, i es troba compilada a Piniles (1861) [23]. Es pot entendre com el resultat d'una doble aplicació de la regla anterior, usant la meitat de les demandes dels agents. Primer apliquem la CEA entre el capital disponible i la meitat de la suma de les demandes. Si el capital disponible es menor que la meitat de la suma de les demandes ja ho tenim. Si no, cada agent rep la meitat de la seva demanda i després tornem a aplicar la CEA per a repartir el que queda.

Regla de Piniles, Pin: Per cada problema de bancarrota $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$Pin_i(E,c) = \begin{cases} CEA_i\left(E, \dfrac{c}{2}\right) & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2} \geq E, \\ \dfrac{c_i}{2} + CEA_i\left(E - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2}, \frac{c}{2}\right) & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2} < E. \end{cases}$$

Regla igualitària

La regla igualitària (Sprumont 1991) [30] és una altra manera diferent d'implementar la idea d'igualtat. Com en la regla anterior aquesta es centra en considerar la meitat de les demandes dels agents. Aquest cop, però, utilitza la regla uniforme per a garantir que es segueixi l'ordre de les demandes.

Regla igualitària, CE (*Constrained Egalitarian rule*): Per cada problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$CE_i(E,c) = \begin{cases} \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} & \text{si } E \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2}, \\ \max\left\{\frac{c_i}{2}, \min\{c_i, \lambda\}\right\} & \text{si } E > \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2}, \end{cases}$$

on per cada cas, λ es triada per a que es compleixi

$$\sum_{i=1}^{n} CE_i(E,c) = E.$$

Observem, que si $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{2} \geq E$ la regla igualitària actuarà com la regla del Talmud. En canvi, si passa al contrari, donem benefici a la demanda més petita fins que supera la pròpia o arriba a la meitat de c_2. Si passa el segon, donem la mateixa quantitat a c_1 i c_2 fins que la més petita arriba a la pròpia demanda. En aquest punt, fem el mateix amb c_2 i c_3 i així successivament fins arribar a c_n.

Regla *Run to the bank*

Aquesta regla és molt diferent a les que hem definit fins ara. Fins al moment totes les regles s'han basat o amb el criteri d'igualtat o el de proporcionalitat per a determinar les solucions. En canvi, aquesta regla es basa en la llei del més ràpid, és a dir, el que arriba primer satisfà la seva demanda al complet i així anar fent fins que el capital s'acaba. Com que en realitat els agents no corren per arribar a obtenir les seves demandes, promitgem entre tots els ordres possibles. Va ser introduïda per O'neill al 1982 [20].

Regla *Run to the bank*, RTB: Per cada problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N$,

$$RTB_i(E,c) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min\left\{c_i, \max\left\{E - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} c_j, 0\right\}\right\}.$$

Observem que no se sap qui arribarà el primer, ni quin ordre seguiran. Per tant, en la definició calcularem per cada ordre el que rebria el demandant i i afegirem $\frac{1}{n!}$, per fer el promig, ja que $n!$ és el nombre d'ordres (permutacions) que hi ha en els que poden arribar els agents. El valor $\pi(i)$ és el lloc que ocupa l'agent i a la permutació.

Aquesta regla es denomina també com *Random Arrival Rule.*

Regla de la mínima superposició

Aquesta regla també es troba en el llibre del Talmud, el rabí Abraham Ibn Ezra en un problema que apareix en el llibre l'explica amb el següent exemple que nosaltres hem passat a euros:

Exemple 3.6. Un home que té 4 fills ha mort i la seva herència (120 €) ha de ser repartida. El primer fill demana la totalitat d'aquesta (120 €), el segon la meitat (60 €), el tercer un terç (40 €) i el quart un quart (30 €). Així doncs, com s'ha de repartir l'herència?

Doncs bé, el que decideix el jutge és que els primers 60 € que només reclama el primer són per ell, seguidament, els següents 20 € (60 - 40) han de ser dividits entre 2, ja que els reclamen dos persones, els següents 10 € $(40-30)$ han de ser dividits entre 3, ja que els reclamen 3 persones i els últims 30 € seran dividits en 4, ja que els reclamen els 4. Així doncs, el vector x de solució serà: $x=(40.83, 20.83, 10.83, 7.50)$.

Aquesta regla es pot explicar amb un algoritme, imaginem que $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^N_+$, ordenats de més petit a més gran agafem la quantitat c_n que serà la quantitat demandada més petita i la dividim entre els n agents i ja tenim que $x_n=\frac{c_n}{n}$. Seguidament agafem la diferència entre $c_{n-1}-c_n$ i la dividim entre els $n-1$ agents que reclamen aquesta part, així el vector de solució quedarà:

$$x=\left(\frac{c_1-c_2}{1}+\dots+\frac{c_{n-1}-c_n}{n-1}+\frac{c_n}{n},\dots,\frac{c_{n-1}-c_n}{n-1}+\frac{c_n}{n},\frac{c_n}{n}\right).$$

Regla de mínima superposició, MO (*Minimal Overlap rule*): Per cada problema de repartiment $(E,c)\in\mathbb{B}^N$, on les demandes són ordenades de forma que $c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_n$.

Dividim E en el nombre de demandes diferents que hi hagi, anomenarem d_i a cada part: Un cop fet la divisió dividim d_i amb el nombre d'agents que reclamen la part dividida. La suma de cada agent vindrà donada per la suma de les parts que ell reclama de E.

Aquesta regla ja va ser analitzada en l'article d'O'Neill (1982) [20]. Una definició detallada d'aquesta regla es pot trobar a Chun i Thomson (2005) [5] que dóna una fórmula precisa per calcular-la. També Alcalde et al. (2008) [1] revisen la regla per veure les seves propietats.

Regla del $\alpha^{\min}$

La regla $\alpha^{\min}$ (Giménez-Gómez i Peris, 2014) [21] assegura una distribució per a cada problema de repartiment seguint el criteri d'igualtat.

La propietat la qual la fa diferent de la resta és que assegura que si la demanda més petita que hi ha és més gran que el capital dividit entre el nombre d'agents, tots els agents rebran el mateix. En canvi, si és a l'inrevés, la demanda més petita rep la totalitat d'aquesta i les altres es reparteixen de manera proporcional.

Regla $\alpha^{\min}$: Per cada problema de repartiment $(E,c)\in\mathbb{B}^N$, i cada $i\in N$, sense perdre generalitat, suposem que el vector $c\in\mathbb{R}^N$ de demandes està ordenat de demanda petita a gran,

$$\alpha_i^{\min}(E,c)=\begin{cases}\frac{E}{n} & \text{si } c_1>\frac{E}{n},\\ \\ c_1+P_i\left(E-nc_1,(c_i-c_1)_{i\in N}\right) & \text{si } c_1\leq\frac{E}{n}.\end{cases}$$

Fins ara hem descrit les 4 regles més importants dels problemes de repartiment que són la proporcional, la igualtat en guanys, la igualtat en pèrdues i el Talmud, a més d'un seguit de regles que també són utilitzades, però no tan destacades. En el capítol següent, caracteritzem aquestes regles amb el mètode axiomàtic per a poder distingir quan un problema de repartiment les aplica per les propietats que té.

Capítol 4

Caracterització dels problemes de repartiment

Un cop fet un recull de les regles de repartiment més importants, hem de veure en què es diferencien unes amb les altres. Més enllà de la definició, les regles compleixen un seguit de propietats que les caracteritzen, les quals poden ser que siguin un tret distintiu de cada una. Els primers que van estudiar aquestes propietats i la caracterització de les regles van ser Aumann i Maschler al 1985 [2].

En aquest capítol, primer de tot analitzem una propietat que és comú a totes les regles, i que s'anomena dualitat. Aquesta propietat permet associar regles per parells com passar de guanys a pèrdues. Un cop vist això passem a la caracterització de les regles, en tres apartats diferents.

Comencem amb un seguit de propietats comunes que compleixen la regla proporcional P, la CEA i la CEL per a poder veure en què s'assemblen. Seguidament, introduïm uns grups de propietats, duals entre elles, que ens ajudaran a la caracterització per separat d'aquestes tres regles.

Per acabar, però no menys important, ens centrem amb la regla del Talmud. La tractem de forma diferent, ja que no té tantes propietats comunes amb les altres, i per tant, ens és més còmode estudiar-la a banda. Per donar la caracterització d'aquesta regla ens ajudem de les propietats definides abans, però és necessari introduir altres propietats diferents.

4.1 Dualitat i regles duals

Abans de començar a parlar de les propietats de les regles de repartiment introduïm la noció de dualitat (Aumann i Maschler, 1985) [2] que serveix per classificar les característiques de les regles.

Per a cada regla de repartiment F podem introduir una nova regla associada a ella gràcies a la dualitat. Aquesta serà obtinguda com el resultat d'aplicar la regla F al problema amb les mateixes propietats però d'assignació de pèrdues. Les pèrdues seran la diferència entre el total que demanen els agents i el que hi ha de capital a repartir. Així obtindrem una nova regla F^* anomenada regla dual de F.

Definició 4.1. Donada una regla F, la *regla dual de F* que denotem per F^* queda definida per:

$$\text{Per tot} \quad (E,c) \in \mathbb{B}^N, \qquad F^*(E,c) = c - F(L,c),$$

on $L = \sum_{j \in N} c_j - E$.

La propietat de dualitat és idempotent, és a dir tenim

$$(F^*)^* = F.$$

Aquestes regles estan relacionades pel fet de que F^* divideix el que està disponible de la mateixa manera amb la que F divideix el que falta. A més, observem que no només passa amb les regles, sinó que la dualitat també apareix en les propietats que caracteritzen aquestes regles.

Més endavant analitzem les regles i les caracteritzem per les propietats que compleixen. Però cada regla dóna lloc a una regla dual, i així mateix cada propietat o axioma dóna lloc a la seva propietat dual. Recordem que la dualitat es fixa en les pèrdues. A més diem que unes propietats són independents si es pot demostrar que cap propietat ϕ es dedueix lògicament de les altres, el que és equivalent a veure que es pot trobar una regla que compleix totes les propietats menys ϕ.

Teorema 4.2. *Si una regla F és caracteritzada per un conjunt de propietats independents $\Pi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$ i per totes les propietats ϕ_i, $i = 1, \dots, k$, existeix la seva propietat dual ϕ_i^*, llavors la regla dual F^* està caracteritzada per $\Pi^* = \{\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_k^*\}$. A més, les propietats π^* també són independents.*

Demostració. Anem a demostrar la primera implicació $\Rightarrow$. Suposem que la regla F està caracteritzada per un conjunt de propietats Π. Per definició de dualitat la regla F^* satisfà les propietats $\{\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_k^*\}$.

Suposem que F^* no esta caracteritzada per Π^*. Llavors existeix G diferent de F^* que satisfà totes les propietats de Π^*. Però llavors $\exists\ G^*$ que satisfà totes les propietats de Π, i per tant $G^* = F$, però això és una contradicció perque la relació dual és idemponent.

I ara demostrem la implicació contrària $\Leftarrow$. Ara suposem que el conjunt de propietats Π^* no és independent $\Rightarrow$ hi ha una propietat ϕ_j^* que pot ser eliminada sense afectar a la caracterització de $F^* \Rightarrow F^*$ caracteritzada per el conjunt de propietats $\Pi^* - \{\phi_j^*\}$, i és una contradicció amb l'enunciat. □

4.2 Algunes propietats comunes (dels 3 mosqueters)

En aquesta secció estudiem propietats que són comunes a diferents regles. En particular estudiem propietats que compleixen les 3 regles principals que hem vist (les anomenades els 3 mosqueters). De moment no tractem la regla del Talmud.

La primera propietat que tractem és una propietat d'anonimitat.

• Tractament igual d'agents amb la mateixa demanda

La primera propietat que definim és una propietat d'anonimitat o si es vol de simetria entre els agents. No importa quin sigui el *cognom* d'un agent per aplicar la regla. Només importa quina és la seva demanda. Aquesta propietat s'anomena en altres contextos *Equal Treatment of Equals.* Fixeu-vos que una regla que fós assignar les demandes seguint l'ordre natural dels agents fins l'esgotament del recurs podria fer que dos agents amb la mateixa demanda fossin tractats de forma diferent, segons l'ordre en què es trobin.

Propietat 4.3. Una regla F satisfà la propietat de *Tractament igual d'agents amb la mateixa demanda* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, i tot $i, j \in N$, si $c_i = c_j$ llavors $F_i(E, c) = F_j(E, c)$.

Aquest és un requeriment d'igualtat bàsic, els demandants amb la mateixa demanda han de rebre exactament el mateix. Observem per la definició del problema de repartiment que aquesta propietat només es centra exclusivament amb igualtats econòmiques, aquesta propietat exclou diferències entre gèneres, religions o status social.

• Invariància per unitats

Suposem ara que tenim un problema de repartiment valorat en unes unitats específiques (si són diners, en euros o dòlars), aquesta propietat ens diu que si canviem les unitats d'un problema, el resultat d'aplicar la regla continuarà sent el mateix que l'anterior.

Propietat 4.4. Una regla F satisfà la propietat de *Invariància per unitats* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, i tot $\lambda \geq 0$, tenim que $F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E, c)$.

Concretament, la invariància per unitats ens diu que les unitats en què el capital i les demandes estan mesurades no influeixen en el resultat. A més, també ens diu que una llei serveix per dividir qualsevol nombre de diners, això és així perque el canvi d'unitats serà sempre de la mateixa proporcionalitat en les demandes i en el capital.

• Composició

La propietat de composició ens diu que qualsevol problema de repartiment (E, c) pot ser solucionat com a la suma parcial de dos problemes més petits. De forma que en primer lloc s'aplica la regla a un tros del capital per després aplicar-la a la resta. Per exemple, si s'ha de fer la liquidació total d'una firma aplicant una regla que satisfà aquesta propietat, aquesta propietat ens diu que és el mateix fer-la tota de cop que per parts.

Propietat 4.5. Una regla F satisfà la propietat de *Composició* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, i tot $E_1, E_2 \in \mathbb{R}_+$ on $E_1 + E_2 = E$ tenim

$$F(E, c) = F(E_1, c) + F\left(E_2, c - F(E_1, c)\right).$$

Observem que la primera part correspon al problema amb les demandes inicials c i a una fracció E_1 del capital. La segona part correspon al conjunt de demandes no satisfetes $c - F(E_1, c)$ i al capital que falta per assignar $E - \sum_{i \in N} F_i(E_1, c)$.

Per acabar, introduïm una proposició que ens indica que si una regla F satisfà la composició, serà contínua. Aquesta ens serà útil per a la caracterització de la regla proporcional

Proposició 4.6. *Si una regla F satisfà la propietat de la composició, llavors $F_i(E, c)$ serà contínua en E per tot $i \in N$.*

Demostració. Sigui un problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i suposem que $F_i(\cdot, c)$ no es contínua respecte el primer argument a E. Això vol dir que podem trobar una successió on $p \in \mathbb{N}$ de forma que $E_p < E$ i $E_p \to E$ i una altra $E'_p > E$ tal que $E'_p \to E$ tal que si anomenem els límits com $a_p = F_i(E_p, c)$ i $b_p = F_i(E'_p, c)$ tenim que $a_p \neq b_p$.

Com que F és monòtona tenim que $a_p \leq F_i(E, c) \leq b_p$. Diem a al límit de a_p i b el límit de b_p, i com no és contínua $a \neq b$.

1. Suposem $a \leq F_i(E, c) < b$: Per tot $j \in N$ sigui $c'_j = c_j - F_j(E, c)$ i definim $\delta > 0$ tal que $F_i(\delta, c') < b - F_i(E, c)$. Per la composició,
$$b < F_i(E + \delta, c) = F_i(E, c) + F_i(\delta, c') < F_i(E, c) + b - F_i(E, c),$$
fet que és una contradicció.
2. Suposem $a < F_i(E, c) \leq b$: Apliquem el mateix raonament que en l'anterior cas.

□

• Independència de camins

La propera propietat analitza què passa quan hem fet un repartiment, però descubrim que no hi ha tant per repartir com pensàvem. El que diu és que és el mateix posar les noves dades amb les demandes originals que posar les noves dades amb l'assignació que hem fet del repartiment inicial.

Propietat 4.7. Una regla F satisfà la propietat de *Independència de camins* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, i tot $E' \geq E$, tenim que $F(E, c) = F\left(E, F(E', c)\right)$.

Essencialment la propietat d'independència de camins garanteix que si substituïm les demandes (*claims*) per unes noves demandes que procedeixen de l'aplicació de la regla a un capital diferent i superior, el resultat final segueix sent el mateix.

És fàcil de veure que si la regla satisfà les dues propietats anteriors, Composició i Independència de camins, és monòtona respecte el capital, és a dir, per qualssevol dos problemes $(E, c), (E', c) \in \mathbb{B}^N$, $E \leq E' \;\Rightarrow F_i(E, c) \leq F_i(E', c)$, per tot $i \in N$.

• Consistència

Les propietats vistes fins el moment pressuposen que estem dins de la mateixa classe de problemes, que comparteixen el conjunt d'agents. En canvi la consistència s'aplica quan volem comparar solucions de problemes on ha augmentat el nombre d'agents o ha disminuït.

Aquesta propietat ens serveix quan el nombre d'agents en un problema és variable. La consistència és una propietat que ens lliga una solució donada (per una regla) a un problema amb N agents amb la solució dels problemes corresponents a tot conjunt $S \subseteq N$.

Donada una solució del problema (N, E, c), és a dir $F(N, E, c)$, aquesta serà consistent si aplicada al problema en un subconjunt qualsevol $S \subseteq N$ i amb el total que els agents a S han aconseguit, dóna el mateix repartiment als agents implicats que el que han obtingut en el problema original. Noti's que en aplicar la regla al problema restringit hem de considerar la restricció de les demandes a aquest conjunt. Denotem per c_S aquesta restricció, és a dir $c_S \in \mathbb{R}^S$ queda definit per $(c_S)_i = c_i$ per tot $i \in S$.

Propietat 4.8. Una regla F satisfà la propietat de *Consistència* si

Per tot $S \subset N$, tot $(N, E, c) \in \mathbb{B}$, i tot $i \in S$, tenim:

$$F_i(N, E, c) = F_i\left(S, \sum_{i \in S} F_i(N, E, c), c_S\right).$$

Aquesta propietat ens porta dues conseqüències importants:

i). Un cop trobada una solució F per un problema de repartiment (N, E, c) si F és consistent no hi haurà cap subgrup que vulgui renegociar l'aplicació de la regla, ja que rebran exactament el mateix que en el problema original. Per tant, el que és bo pel grup gran també ho serà pels subgrups.

ii). Si una solució F d'un problema (N, E, c) pot ser extesa consistentment a un problema (N', E', c') on $\left|N'\right| = |N| + 1$, aquesta extensió serà única.

Tot seguit enunciem una caracterització conjunta de les tres regles considerades els 3 mosqueters, aquest teorema ens anuncia que aquestes regles són les úniques que compleixen aquestes 5 propietats.

Teorema 4.9. *Només hi ha 3 regles a $\mathbb{B}$ que compleixin simultàniament les propietats d'igual tractament dels iguals, invariància per unitats, composició, independència de camins i consistència. Aquestes regles són la proporcional (P), la igualtat en guanys (CEA) i la igualtat en pèrdues (CEL).*

Demostració. Es pot trobar a Moulin (2000) [19]. □

Un cop hem vist un seguit de propietats que compleixen els 3 mosqueters, veiem les propietats principals que utilitzarem per diferenciar-les.

4.3 Propietats especials

Un cop hem trobat les propietats que tenen en comú les tres regles, anem a veure les que ens permetran diferenciar-les. Veurem com la regla d'igualtats en guanys dóna prioritat als agents amb demandes més petites, la igualtat en pèrdues als agents amb demandes més grans i la regla proporcional donarà prioritat als agents amb demandes intermèdies.

• Exempció i exclusió

Aquestes dues propietats fan referència al comportament d'una regla en el cas en que les demandes dels agents siguin molt desiguals entre elles. Expresen dos principis oposats sobre les demandes que ens expressen clarament com les regles haurien d'actuar en situacions extremes. Ens ajudaran a triar entre les diferents regles depenent dels problemes que tinguem.

La primera propietat ens diu que quan les demandes dels agents són suficientment diferents, només es racionaran les demandes més gran. En concret, ens diu que si una demanda és menor que el repartiment igualitari entre els agents, és a dir $c_i \leq \dfrac{E}{n}$ per $i \in N$, una regla que compleixi aquesta propietat d'exempció ha de garantir que es satisfaci el total d'aquesta demanda.

Propietat 4.10. Una regla F satisfà la propietat d'*Exempció* si

Per tot $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ si $c_i \leq E/n$, per algun $i \in N$ llavors:

$$F_i(E,c) = c_i.$$

La segona propietat expressa totalment la noció contrària, els agents amb les demandes més petites haurien de ser exclosos, ja que han de suportar unes pèrdues que seran més gran que el que demanen.

En un problema de repartiment (E,c), el nombre $L = \sum_{j \in N} c_j - E$ és el total de pèrdues que hauran de suportar respecte les seves demandes. I el nombre $\dfrac{L}{n}$ que és el promig racional de pèrdua que experimenten els agents. Una demanda c_i per $i \in N$ s'anomena *irrellevant* si $c_i \leq \dfrac{L}{n}$. L'exclusió diu que les demandes irrellevants han de ser excluïdes.

Propietat 4.11. Una regla F satisfà la propietat d'*Exclusió* si

Per tot $(E,c) \in \mathbb{B}^N$, si $c_i \leq L/n$, per algun $i \in N$, on $L = \sum_{j \in N} c_j - E$, tenim:

$$F_i(E,c) = 0.$$

Per tant, aquesta propietat anirà vinculada a les regles que tinguin preferències cap a els agents amb demandes més grans. A més, podem observar que l'exempció i la exclusió són propietats contràries, per tant, no hi pot haver cap regla que les tingui les dues juntes.

Observació 4.12. L'exclusió i l'exempció són propietats duals entre elles.

• Independència del truncament de demandes i composició dels drets mínims

Les dues següents propietats també representen principis alternatius sobre l'exigibilitat de les demandes.

La primera propietat es basa en que els agents les demandes dels quals exigeixen un valor superior al capital disponible haurien de retallar-les, i proposa escalar-les a demandes raonables, que no superin la quantitat a repartir.

La segona propietat ens parla sobre els drets mínims d'un agent, com la quantitat que es deixa a un agent quan les altres quantitats són repartides. Ens parla de que la solució ha de garantir com a mínim a cada agent el seu dret mínim.

Considerem un problema de bancarrota on la demanda d'alguns dels agents és més gran que el capital E. Com les hauriem de tractar? La independència del truncament de demandes ens diu que si la demanda $c_i > E$ és substituïda per E no afectarà a la solució.

Propietat 4.13. Una regla F satisfà la propietat de *Independència del truncament de demandes* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ tenim:

$$F(E, c) = F(E, c^T),$$

on $c_i^T = \min\{E, c_i\}$ per tot $i \in N$.

Per enunciar la següent propietat primer hem de parlar del que s'entèn com a drets mínims d'un agent. Per un problema $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ definim els *drets mínims* d'un agent $i \in N$ com:

$$m_i(E, c) = \max\left\{0,\ E - \sum_{j \neq i} c_j\right\} \quad \text{per } i \in N.$$

Aquest valor representa la part del capital que queda per un agent quan les demandes dels altres agents són satisfetes al complet. I per tant la quantitat que pot considerar quantitat garantida. Denotarem $m(E, c) \in \mathbb{R}^n$ com el *vector de drets mínims* dels agents.

La següent propietat ens diu que la regla que la compleixi, en primer lloc repartirà els drets mínims a cada agent i després resoldrà el problema amb el capital restant.

Propietat 4.14. Una regla F satisfà la propietat de *Composició dels drets mínims* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, tenim:

$$F(E, c) = m(E, c) + F\left(E - \sum_{i \in N} m_i(E, c),\ c - m(E, c)\right).$$

Observem que la composició dels drets mínims és una variant de la composició, ja que ens mostra el problema de repartiment com una nova composició entre el vector de drets mínims i el problema que es crea després amb el capital sobrant.

Observació 4.15. La independència del truncament de demandes i la composició de drets mínims són propietats duals entre elles.

• Propietat de co-dualitat

Una regla és anomenada co-dual quan coincideix amb la seva regla dual.

Propietat 4.16. Una regla F satisfà la propietat de *co-dualitat* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, tenim:

$$F(E, c) = F^*(E, c) = c - F(L, c).$$

on $L = \sum_{j \in N} c_j - E$.

La co-dualitat és una propietat que introdueix el principi de simetria en el comportament de les solucions respecte els guanys i les pèrdues.

Un cop hem vist les propietats, comuns a diferents regles principals i també propietats que compleixen algunes regles i altres no, passarem a caracteritzar les regles principals.

4.4 Caracterització dels 3 mosqueters

En aquest apartat donarem i demostrarem un seguit de teoremes que ens caracteritzaran les regles de repartiment segons les propietats donades anteriorment.

Abans de començar però, enunciem un lema que ens serà molt útil a l'hora de demostrar els teoremes de caracterització. El lema de l'elevació (Thomson, 2011) [33] ens diu que quan dues regles són consistents i coincideixen en el cas $N = 2$, coincidiran també en els altres casos.

Lema 4.17. ***(Lema de l'elevació)*** *Si dues regles R, F són consistents i coincideixen pels problemes de repartiment de dos jugadors, coincidiran per qualsevol nombre de jugadors.*

Demostració. Es pot trobar a Thomson (2011) [33]. □

Començarem per dos teoremes que demostren les propietats que tenen la regla de la igualtat en guanys (CEA) i la de la igualtat en pèrdues (CEL).

Teorema 4.18. *La igualtat en guanys (CEA) és la única regla en $\mathbb{B}$ que satisfà:*

i). La independència de camins.

ii). La consistència.

iii). L'exempció.

Demostració. És fàcil veure que aquesta regla compleix les tres propietats, anem a veure la demostració a la inversa.

Sigui R una regla de repartiment que compleix aquestes propietats, veiem que és suficient demostrat el cas pel problemes de dos jugadors, ja que tant R com la CEA són regles consistents. Llavors, podrem aplicar el lema de l'elevació per el cas $N > 2$. A més, necessitarem la propietat de l'igual tractament pels iguals, que veiem que R en un problema de 2 jugadors la compleix ja que compleix la independència de camins i l'exempció (Herrero i Villar, 2001) [17].

Sigui $(E, c) \in \mathbb{B}^2$. Sense perdre la generalitat, podem suposar que $c_1 \leq c_2$, així, tenim 3 casos diferents a analitzar:

1. Si $c_1 = c_2$: Per la propietat d'igual tractament dels iguals que ja hem vist abans que R la complia tenim que
$$R_1(E,c) = R_2(E,c) = \frac{E}{2}$$
que és la solució de la CEA en aquest cas.

2. Si $\frac{E}{2} \geq c_1$. Per l'exempció,
$$R_1(E,c) = c_1, R_2(E,c) = E - c_1$$
que és la solució donada per la CEA en aquest cas.

3. Si $\frac{E}{2} < c_1$. Per tant, tenim que $E' = 2c_1 > E$. Per l'exempció tenim que si $R_1(E',c) = R_2(E',c) = c_1$ i la independència de camins implica que $R(E,c) = R[E, R(E',c)]$. Per tant, l'igual tractament dels iguals ens implica que
$$R(E,c) = (\frac{E}{2}, \frac{E}{2}),$$
que és la solució donada per la CEA.

Així doncs, tenim que $R(2,E,c) = CEA(2,E,c)$ i aplicant el lema de l'elevació concluïm que $R(N,E,c) = CEA(N,E,c)$.

□

Ara caracteritzarem la regla de la igualtat en pèrdues (CEL).

Teorema 4.19. *La regla de la igualtat en pèrdues (CEL) és la única regla en $\mathbb{B}$ que satisfà:*

i). La composició.

ii). La consistència.

iii). L'exclusió.

Demostració. Sabem que la regla de la igualtat en guanys i la regla de la igualtat en pèrdues són duals. A més, la composició és la propietat dual de la independència de camins, l'exclusió és la propietat dual de l'exempció i la consistència és co-dual. Per tant, el resultat surt del teorema que lliga les propietats duals amb la regla dual. □

A més, tenim dos teoremes més que ens ajuden a distingir entre aquestes dues regles de repartiment:

Teorema 4.20. *(Dagan, 1996) [6] Per tot problema de $\mathbb{B}$ la regla de la igualtat en guanys (CEA) és la única que satisfa:*

i). L'igual tractament pels iguals.

ii). La composició.

iii). La independència del truncament de demandes.

Demostració. Sigui (E,c) un problema de repartiment en $\mathbb{B}^N$ i R una regla que compleix aquestes tres propietats. Veiem que només pot ser la CEA:

Observem que si la regla satisfa la composició, és monòtona, és a dir, si el capital augmenta, cap agent pot quedar pitjor del que estava. Assumim sense perdre la generalitat que les demandes estan amb ordre creixent.

Hem de considerar diversos casos, comencem per que totes les demandes estan per sobre del capital. Després anem augmentant el valor de E fins que cobrim tots els casos:

1. Si $E \leq c_1$ Per la independència del truncament de demandes i l'igual tractament dels iguals cada demanda tindrà el mateix que les altres, per tant,

$$R_i(E,c) = CEA_i(E,c) = \frac{E}{n}$$

   per tot $i \in N$. Diem $E_1 = c_1$.

2. Si $c_1 \leq E \leq c_1 + c_1(1 - \frac{1}{n})$: Per la composició i el cas anterior $R(E,c) = R(E_1,c) + R(E - E_1, c - R(E_1,c))$. Observem que $E - E_1 \leq c_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = c_1 - x_1$. Llavors, per la independència del truncament de demandes i l'igual tractament dels iguals, la quantitat $E - E_1$ es repartida per igual, llavors $R(E - E_1, c - R(E_1,c)) = CEA(E - E_1, c - R(E_1,c))$ i $R(E,c) = CEA(E,c)$. Ara, podem repetir el mateix argument i veure que $R(E,c) = CEA(E,c)$ per tot $E < nc_1$. Per la monotonia de R aquest argument funciona per $E = nc_1$.

El mateix argument pot ser aplicat per veure que $R(E,c) = CEA(E,c)$ per tot $E < nc_1 + (n-1)(c_2 - c_1)$. Aquest argument es pot repetir per tots els capitals possibles.

□

D'aquest resultat i de la dualitat existent entre la regla d'igualtat en guanys i la regla d'igualtat en pèrdues podem extreure el següent teorema:

Teorema 4.21. *(Herrero, 2001) [17] Per tot problema de $\mathbb{B}$ la regla de la igualtat en pèrdues (CEL) és l'única que satisfà:*

i). L'igual tractament pels iguals.

ii). La independència de camins.

iii). La composició dels drets mínims.

Demostració. La independència de camins i la composició són propietats duals. A més l'igual tractament dels iguals és una propietat co-dual i per últim, la composició dels drets mínims és la propietat dual de la independència del truncament de demandes. Un cop tenim aquests resultats i sabem que la regla dual de la igualtat en pèrdues és la igualtat en guanys, obtenim el teorema. □

Tot seguit enunciem un teorema per diferenciar la regla de la proporcionalitat de les altres 2 regles:

Teorema 4.22. *(Young 1988) [38] Per tot problema de $\mathbb{B}$ la regla proporcional es la única regla que satisfà:*

i). L'igual tractament dels iguals.

ii). La composició.

iii). La co-dualitat.

Demostració. Suposem R una regla a $\mathbb{B}$ que compleix les propietats d'igual tractament dels iguals, composició i co-dualitat, anem a veure que aquesta regla és la proporcional.

Sigui $x \in \mathbb{R}^N$ la solució d'aquesta regla pel problema (E,c), definim el camí cap a x com la corba contínua traçada per la funció $y(T) = x - R(T,x)$ on $T \in \left[0, \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$. Escriurem $y \; P \; x$ si y està en el camí cap a x.

La composició de la regla implica que aquesta P és transitiva i la co-dualitat implicarà que

$$y\ P\ x \Leftrightarrow (x-y)\ P\ x.$$

Com que R és contínua, existeix un vector y tal que $y\ P\ x$ i $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2}$. Per la co-dualitat tenim que $(x-y)\ P\ x$, per tant, $y = \frac{x}{2}$, és a dir,

$$\frac{x}{2}\ P\ x \quad \text{per tot } x \in \mathbb{R}^N.$$

Aplicant el mateix argument a $\frac{x}{2}$ arribem a que $\frac{x}{4}\ P\ \frac{x}{2}$. Com que P és transitiva, $\frac{x}{4}\ P\ x$. Per co-dualitat també tenim que $\frac{3x}{4}\ P\ x$. Per tant, podem concluir que per tots $n, m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m \leq 2^n$, tenim que $\frac{mx}{2^n}\ P\ x$, és a dir per totes les fraccions intermitges de denominador una potència de dos. I per continuitat, el camí cap a x és un segment de l'origen cap a x. Finalment, com que aquest argument serveix per cada x, R és la regla proporcional. □

Analitzem ara les propietats de la regla del Talmud i la seva caracterització.

4.5 Caracterització del Talmud

Per últim, anem a veure la caracterització de la regla del Talmud. Aquesta caracterització serà una mica diferent ja que fa servir propietats una mica diferents a les altres tres.

• Propietat de l'Assegurament

Introduïm una nova propietat anomenada assegurament que ens garanteix un mínim benefici per a cada agent. L'assegurament ens diu que cada agent amb una demanda factible, és a dir, $c_i \leq E$ ha de rebre almenys la fracció (si són dos la meitat) de la seva demanda, $\frac{c_i}{n}$.

Cada agent amb una demanda que no és factible, és a dir, $c_i \geq E$ ha de rebre com a mínim la fracció del capital a repartir $\frac{E}{n}$.

Propietat 4.23. Una regla F satisfà la propietat de *l'assegurament* si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, tenim que per tot $i \in N$

$$F_i(N, E, c) \geq \frac{\min\{c_i, E\}}{n}.$$

Observem que la garantia que ens diu aquesta propietat depèn de la demanda de l'agent, del nombre d'agents i del capital, per tant, si una regla compleix aquesta propietat cada agent sap un mínim que rebrà sense tenir cap informació sobre les demandes dels altres agents.

Introduïm ara també la propietat dual de l'assegurament, que anomenem assegurament* ja que la necessitarem també en la caracterització del Talmud:

Propietat 4.24. Una regla F satisfà la propietat de *l'assegurament** si

Per tot $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ tenim que

$$F_i(N, E, c) \leq c_i - \frac{\min\{c_i, C-E\}}{n}, \quad \text{on } C = \sum_{i \in N} c_i.$$

Ara ja podem donar una caracterització de la regla del Talmud.

Teorema 4.25. *La regla del Talmud és la única regla en* $\mathbb{B}$ *que satisfà:*

i). La consistència.

ii). La co-dualitat.

iii). L'assegurament.

Demostració. En un sentit, és fàcil veure que la regla del Talmud satisfà la consistència i la co-dualitat, però el que no és tan evident és que satisfà l'assegurament, anem a veure-ho:

Donat que la regla del Talmud compleix la monotonia de demandes, és suficient veure que un agent $i \in N$ que té una demanda $c_i \leq E$ rep almenys $\frac{c_i}{n}$.

Aquesta propietat és trivial quan $E \geq \frac{C}{2}$ on $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$.

Anem a veure el cas $E \leq \frac{C}{2}$. En aquest cas tenim $T_i(N, E, c) = min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\}$ per tot $i \in N$.

Per tal d'arribar a una contradicció, suposem que existeix un i on $T_i(N, E, c) = \lambda < \frac{c_i}{n} \leq \frac{c_i}{2}$ i que $\lambda < \frac{E}{n}$.

Ara, suposant les demandes ordenades de forma creixent, tenim que per tot $k \geq i$ tenim que $\frac{c_k}{2} \geq \frac{c_i}{2}$, el que implica que $T_k(N, E, c) = \lambda < \frac{E}{n}$ i com a conseqüència,

$$E = \sum_{k \in N} T_k(N, E, c) = \sum_{k=1}^{i-1} T_k(N, E, c) + \sum_{k=i}^{n} \lambda.$$

Com que $\lambda < \frac{c_i}{n}$, tenim que

$$\sum_{k=1}^{i-1} T_k(N, E, c) + \sum_{k=i}^{n} \lambda < \sum_{k=1}^{i-1} T_k(N, E, c) + (n - i + 1)\frac{E}{n}.$$

Així doncs, $\sum_{k=1}^{i-1} T_k(N, E, c) > \frac{(i-1)E}{n}$ i com que $T_k(N, E, c) \geq 0$ per tot $k \in N$ per tal de que $\sum_{k=1}^{n} T_k(N, E, c) = E$ ha d'existir un $1 \leq k_0 \leq i - 1$ on $T_{k_0}(N, E, c) > \frac{E}{n} > \lambda = T_n(N, E, c)$ i com que el Talmud compleix la propietat de preservació de l'ordre, tenim una contradicció.

En l'altre sentit, sigui R una regla que satisfagi totes aquestes propietats.

Ja que la regla R i T són regles consistents, podrem aplicar el lema de l'elevació, per tant, sense perdre la generalitat suposarem que (N, E, c) és un problema de bancarrota amb $N = \{1, 2\}$

i $c_1 \leq c_2$. Així, la regla del Talmud T serà expressada com:

$$T(N,E,c) = \begin{cases} (\frac{E}{2}, \frac{E}{2}) & \text{si } E \leq c_1 \\ (\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2}) & \text{si } c_1 \leq E \leq c_2 \\ \left(c_1 - \frac{C-E}{2}, c_2 - \frac{C-E}{2}\right) & \text{si } c_2 \leq E \end{cases}$$

Tenim diferents casos per discutir:

1. $E < c_1$: En aquest cas, $E < c_i$ per tot $i = 1,2$. Així, d'acord amb l'assegurament, $R_i(N,E,c) \geq \frac{E}{2}$ per tot $i = 1,2$. Com que $R_1(N,E,c) + R_2(N,E,c) = E$, llavors $R_i(N,E,c) = \frac{E}{2} = T_i$, per $i = 1,2$.

2. $c_1 \leq E \leq c_2$: Com que $c_1 \leq E$ i R satisfà l'assegurament, $R_1(N,E,c) \geq \frac{c_1}{2}$. A més, $E \leq c_2$ és equivalent a dir que $c_1 \leq C - E$ llavors l'assegurament implica que $R_1(N, C-E, c) \geq \frac{c_1}{2}$. Ara, com que R satisfà la propietat de co-dualitat, $R_1(N,E,c) = c_1 - R_1(N, C-E, c) \leq \frac{c_1}{2}$. Com a resultat d'això, $R(N,E,c) = (\frac{c_1}{2}, E - \frac{c_1}{2} = T(N,E,c)$.

3. $c_2 < E$: Aquest cas és equivalent a $c_1 > C - E$. Llavors gràcies al primer cas, $R(N, C-E, c) = (\frac{C-E}{2}, \frac{C-E}{2})$. Per la co-dualitat, $R(N, C-E, c) = c - R(N,E,c)$. Per tant, $R(N,E,c) = (c_1 - \frac{C-E}{2}, c_2 - \frac{C-E}{2}) = T(N,E,c)$.

Com que $R(2,E,c) = T(2,E,c)$ i les dues són regles consistents, podem aplicar el lema de l'elevació per a veure que $R(N,E,c) = T(N,E,c)$.

$\square$

D'aquesta demostració tenim que la regla del Talmud també compleix la propietat dual de l'assegurament. A més, tenim que és la única regla que satisfà la consistència, l'assegurament i la seva propietat dual:

Teorema 4.26. *La regla del Talmud és la única regla en $\mathbb{B}$ que satisfà:*

i). La consistència.

ii). L'assegurament.

iii). L'assegurament.*

Demostració. Per la primera implicació, veiem que pel teorema anterior tenim que el Talmud satisfà aquestes la consistència i l'assegurament, però a més, al ser una regla co-dual, ha de satisfer la propietat dual de l'assegurament.

En l'altre sentit, sigui R una regla que satisfà les 3 propietats utilitzarem el mateix camí que abans, demostrarem el teorema pel cas $N = \{1,2\}$ i com que la regla R i el Talmud són propietats consistens, gràcies al lema de l'elevació tindrem els altres casos.

Per tant, sigui (N,E,c) un problema de bancarrota on $N = \{1,2\}$ i $c_1 \leq c_2$. Així els resultats de la regla del Talmud seràn els mateixos que anteriorment, per tant, dividirem en 3 casos:

i). $E < c_1$: Per l'assegurament, $R_i(N,E,c) \geq \frac{E}{2}$ per tot $i = 1,2$. Com que $R_1(N,E,c) + R_2(N,E,c) = E$ llavors $R_i(N,E,c) = \frac{E}{2} = T_i(N,E,c)$ per $i = 1,2$.

ii). $c_1 \leq E \leq c_2$: Per l'assegurament $R_1(N,E,c) \geq \frac{c_1}{2}$. Llavors, és equivalent a dir que $c_1 \leq C - E \leq c_2$. Per això, per la regla dual de l'assegurament $R_1(N,E,c) \leq \frac{c_1}{2}$. Com a resultat, d'això, $\frac{c_1}{2} \leq R_1(N,E,c) \leq \frac{c_1}{2}$.Per tant, $R_1(N,E,c) = \frac{c_1}{2} = T_1(N,E,c)$ i $R_2(N,E,c) = E - \frac{c_1}{2} = T_2(N,E,c)$.

iii). $c_2 < E$: Aquest cas és equivalent a $c_1 > C - E$. Per la regla dual de l'assegurament, $R_i(N,E,c) \leq c_i - \frac{C-E}{2}$ per tot $i = 1,2$. Com que $R_1(N,E,c) + R_2(N,E,c) = E$, llavors $R_i(N,E,c) = c_i - \frac{C-E}{2} = T_i(N,E,c)$ per $i = 1,2$.

Així doncs, tenim que $R(2,E,c) = T(2,E,c)$ i aplicant el lema de l'elevació concluïm la prova.

$\square$

Com a conseqüència d'aquest resultat, veiem que una regla consistent que satisfagi la composició de drets mínims i la seva propietat dual ha de ser co-dual.

Ara que ja hem vist la caracterització de les 4 regles més importants dels problemes de repartiment, veiem la relació que hi ha entre aquestes i les solucions dels jocs cooperatius.

Capítol 5

Problemes de repartiment i jocs cooperatius

Fins ara hem presentat diversos resultats que caracteritzen les 4 solucions clàssiques als problemes de repartiment. Podem considerar cada regla com una aplicació diferent del concepte d'igualtat en que la seva aplicació pot dependre del tipus de problema considerat. Podem dir en termes generals, que els 3 mosqueters apliquen el mateix sistema d'igualtat, però canviant la variable en la que apunten aquests, als guanys, a les pèrdues o a les ratios. Per altra banda la regla del Talmud, aplica un proteccionisme individual que assegura que cada agent pateixi un racionament el més semblant possible.

Anem a veure ara com aquestes regles de repartiment estan lligades amb els jocs cooperatius. Per fer-ho, definim en primer lloc un joc cooperatiu associat a tot problema de repartiment, i que té un significat ben clar. Veurem la relació entre les solucions dels jocs donades al capítol de preliminars amb les regles ja esmentades anteriorment. Així doncs, veurem que cada regla de repartiment guarda relació amb un tipus de solució dels jocs cooperatius.

5.1 Passos previs

Anem a fer uns passos previs a la relació entre els jocs cooperatius i els problemes de repartiment.

Donat un problema de repartiment definim un joc cooperatiu associat. En ell una coalició rep el que queda si donés als agents que no hi són a la coalició el total de les seves demandes. Això és, el que la coalició té garantit. Per tant, podem posar aquesta definició.

Definició 5.1. Sigui $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ un problema de repartiment. El joc $(N, v_{(E,c)})$ definit per

$$v_{(E,c)}(S) = \max\{E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i, 0\},$$

és el *joc cooperatiu associat* al problema de repartiment.

De la pròpia definició del joc cooperatiu tenim que $v_{(E,c)}(N) = E$, i per tant una solució reparteix el total del capital.

Veiem en primer lloc que el joc cooperatiu associat al problema de repartiment és un joc convex.

Proposició 5.2. *Per cada problema de repartiment* $(E, c) \in \mathbb{B}^N$*, el joc cooperatiu associat* $(N, v_{(E,c)})$ *és un joc convex.*

Demostració. Sigui $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, i dues coalicions $S, T \subseteq N$ tal que $S \subset T \subset N$ i una $i \notin T$ donada. Escrivim v en lloc de $v_{(E,c)}$. Hem de veure

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),$$

és a dir:

$$\max\{E - \sum_{j \in N \setminus S \cup \{i\}} c_j, 0\} - \max\{E - \sum_{j \in N \setminus S} c_j, 0\} \leq \max\{E - \sum_{j \in N \setminus T \cup \{i\}} c_j, 0\} - \max\{E - \sum_{j \in N \setminus T} c_j, 0\},$$

Denotem per $\Delta = \sum_{j \in N} c_j - E$, i també $c(R) = \sum_{j \in R} c_j$ per qualsevol $R \subseteq N$.

Llavors tenim:

$$\max\{-\Delta + \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j, 0\} - \max\{-\Delta + \sum_{j \in S} c_j, 0\} \leq \max\{-\Delta + \sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j, 0\} - \max\{-\Delta + \sum_{j \in T} c_j, 0\}.$$

Per cada $S' \subseteq N$, definim $d(S') = \max\{-\Delta + \sum_{j \in S'} c_j, 0\}$. Llavors, tenim que la anterior desigualtat es converteix en

$$\delta(S) = d(S \cup \{i\}) - d(S) \leq d(T \cup \{i\}) - d(T) = \delta(T).$$

Separem en 2 casos:

i). $\sum_{j \in S} c_j \leq \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j \leq \sum_{j \in T} c_j \leq \sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j$: comparem Δ en cada suma i veiem com arribem a la solució trobant la diferència entre $\delta(S)$ i $\delta(T)$. Tenim 5 casos diferents:

- $\sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j \leq \Delta$:

  Llavors $d(S) = d(S \cup \{i\}) = d(T) = d(T \cup \{i\}) = 0,$ i per tant, $\delta(S) = \delta(T) = 0$.

- $\sum_{j \in T} c_j \leq \Delta \leq \sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j$:

  Continuem tenint que $\delta(S) = 0$, però$\delta(T) = 0 - \Delta + \sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j > 0$.

- $\sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j \leq \Delta \leq \sum_{j \in T} c_j$:

  Continuem tenint que $\delta(S) = 0$, però$\delta(T) = -\Delta + \sum_{j \in T \cup \{i\}} c_j - \left(-\Delta + \sum_{j \in T} c_j\right) = c_i$.

- $\sum_{j \in S} c_j \leq \Delta \leq \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j$:

  Llavors $\delta(S) = -\Delta + \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j \leq c_i$ i com en l'anterior cas, $\delta(T) = c_i$.

- $\Delta \leq \sum_{j \in S} c_j$:

  Llavors $\delta(S) = -\Delta + \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j - \left(-\Delta + \sum_{j \in S} c_j\right) = c_i,$

  i per altra banda, com en l'anterior cas, $\delta(T) = c_i$.

ii). $\sum_{j\in S} c_j \leq \sum_{j\in T} c_j \leq \sum_{j\in S\cup\{i\}} c_j \leq \sum_{j\in T\cup\{i\}} c_j$: tenim 5 casos paral·lels als anteriors que es resolen igual.

□

Això és important, ja que les principals solucions pels jocs cooperatius es troben dins del *core*. Quan veiem que hi ha correspondència entre solucions puntuals i regles, això assegura que el resultat de la regla és estable. Veurem alguna propietat que per les relacions entre els jocs i els problemes de repartiment són importants, per exemple, el valor de Shapley i la solució Dutta-Ray sempre estan dins del *core* en els joc convexos.

A més, tenim que la regla proporcional del problema de repartiment esta en el *core* del joc cooperatiu associat.

Proposició 5.3. *Sigui $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ i sigui $(N, v_{(E,c)})$ el seu joc cooperatiu associat, tenim que*

$$P(E,c) \in C(v_{(E,c)}).$$

on $P(E,c)$ és la regla proporcional del problema de repartiment i $C(v_{(E,c)})$ és el core del joc cooperatiu.

Demostració. Sigui $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ un problema de repartiment, recordem que la regla proporcional ve determinada per cada $i \in N$ $P_i(E,c) = \lambda c_i$ on λ és triada per a que compleixi $\sum_{i=1}^{n} \lambda c_i = E$. D'aquí, podem treure que

$$P(E,c) = \left(\frac{c_1 E}{\sum_{i=1}^n c_i}, \ldots, \frac{c_n E}{\sum_{i=1}^n c_i} \right)$$

Per altra banda, el core d'un joc cooperatiu (N,v) ve determinat per

$$C(v) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N) \ \text{ i } \ x(S) \geq v(S), \quad \text{per tot} \quad S \neq \emptyset, N \Big\}.$$

Anem a veure que $P(E,c) \in C(v_{(E,c)})$. La primera propietat és directa, ja que $\sum_{i\in N} P_i(E,c) = E$. Escrivim v en lloc de $v_{(E,c)}$ si no hi ha confusió.

Agafem doncs una coalició $S \subset N$ qualsevol, tindrem dos casos diferenciats:

• El primer cas és si $v(S) = 0$: Aquest cas és clar, ja que $P_i(E,c) \geq 0$, per tant, $P(E,c)(S) \geq v(S)$.

• El segon cas és si $v(S) > 0$: Per tant, $v(S) = E - \sum_{i\in N\setminus S} c_i$. A més,

$$P(E,c)(S) = \frac{\sum_{i\in S} c_i}{\sum_{j\in N} c_j} \cdot E.$$

Calculem la diferència entre els dos i veiem que és positiva:

$$P(E,c) - v(S) = \frac{\sum_{i\in S} c_i}{\sum_{j\in N} c_j} \cdot E - E + \sum_{i\in N\setminus S} c_i = -\frac{\sum_{i\in N\setminus S} c_i}{\sum_{j\in N} c_j} \cdot E + \sum_{i\in N\setminus S} c_i.$$

Aquesta expressió es converteix en

$$\left(1 - \frac{E}{\sum_{j\in N} c_j}\right) \cdot \sum_{i\in N\setminus S} c_i \geq 0,$$

que és positiva, ja que $\sum_{j\in N} c_j \geq E$ per definició de problema de repartiment. □

Per últim, observem que si trunquem les demandes del problema de repartiment en convertir-lo a joc cooperatiu ens surtirà el mateix joc cooperatiu que si no les haguessim truncat.

Proposició 5.4. *Sigui $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ i $(E,c') \in \mathbb{B}^N$ el mateix problema de repartiment, però amb les demandes truncades, tenim que els jocs cooperatius associats són iguals:*

$$(N, v_{(E,c)}) = (N, v_{(E,c')}).$$

Demostració. Observem que per definició, el joc associat al problema de repartiment (E,c) ve determinat per,

$$v(S) = \max\{E - \sum_{i\in N\setminus S} c_i, 0\}.$$

Per tant, sigui v el joc associat a (E,c) i v' el joc associat a (E,c') hem de veure que $v = v'$.

Observem que si agafem una coalició $S \subset N$ tal que, per tot $i \in N \setminus S, c_i \leq E$, tindrem que

$$v(S) = v'(S)$$

Per tant, agafem $T \subset N$ tal que existeix una $i \in N\setminus T$ tal que $c_i > E$. Quan trunquem la demanda ens quedarà que $c_i = E$, per tant, anem a veure el valor dels dos jocs en T.

$v(T) = \max\{E - \sum_{i\in N\setminus T} c_i, 0\} = 0$, ja que tenim una $i \in N \setminus T$ tal que $c_i > E$, per tant, $0 > E - \sum_{i\in N\setminus T} c_i$.

Per altre banda, $v'(T) = \max\{E - \sum_{i\in N\setminus T} c'_i, 0\} = 0$, ja que tenim una $i \in N\setminus T$ tal que $c'_i = E$, per tant, $0 \geq E - \sum_{i\in N\setminus T} c_i$. □

Anem a veure aquests tres resultats amb l'exemple introduït anteriorment per veure com eren els jocs de repartiment:

Exemple 5.5. Un home mor deixant una fortuna de 4.000 € a repartir entre tres germans, a qui ha promès diferents quantitats. Cada un demana una quantitat: $c_1 = 4.000$ €, $c_2 = 4.000$ € i $c_3 = 3.000$ €.

Per començar, farem la regla proporcional del problema. El valor de $\lambda = \frac{4.000}{11.000} = 0,36$. Per tant, el vector $P(4.000, c) = (1.455, 1.455, 1.090)$.

Fet això, anem a definir el joc associat al problema de repartiment.

$$\begin{aligned}
&v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\\
&v(\{1,2\}) = 1.000, v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 0 \text{ i}\\
&v(\{1,2,3\}) = 4.000.
\end{aligned}$$

El fet de que és un joc convex es comprova fàcilment. Anem a veure quins vectors pertanyen al core del joc. El core serà $C(v) = \{(t, t, 4.000 - t) \text{ on } t \in [500, 2.000]\}$.

Observem que $P(4.000, c) \in C(v)$, ja que segueix la fòrmula anterior i $500 \leq 1.455 \leq 2.000$.

5.2 Correspondències regles–solucions

Donat un problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$, el que una regla de repartiment R correspongui a una solució d'un joc cooperatiu significa que ens podem plantejar el problema de dues maneres diferents:

i). Fer com si aquesta relació no existís i obtenir el vector solució aplicant la funció R al problema de repartiment.

ii). Transformar el problema de repartiment en un joc cooperatiu que quedarà com $v(E,c) \in V^N$ i llavors aplicar la solució ϕ que guarda correspondència amb la regla R.

La regla R i la solució ϕ guardaran correspondència si, per cada $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ aquest diagrama commuta, és a dir, $S = \phi \circ v(E,c)$.

La primera correspondència que veurem és entre la regla *run to the bank* i el valor de Shapley que és molt conegut per la seva definició en forma combinatòria, que farem servir per a demostrar la correspondència. També hi ha una relació entre la regla del Talmud i el kernel i el nucleolus que com hem vist abans, coincideixen en els jocs cooperatius convexos. Per últim, la regla proporcional ajustada, obtinguda gràcies la regla proporcional i a les propietats dels drets mínims i del truncament de demandes, guarda correspondència amb el valor de τ.

La regla *Run to de bank* i el valor de Shapley

La primera relació que veiem és la existent entre la regla *Run to the bank* i la solució puntual dels jocs cooperatius el valor de Shapley.

Teorema 5.6. *Existeix una correspondència entre la regla dels problemes de repartiment Run to the bank i la solució dels jocs cooperatius el valor de Shapley.*

Demostració. Sigui un problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$. Fixem un ordre d'arribada dels agents, donat per una permutació $\pi \in \Pi_N$, així doncs, per cada agent $i \in N$, tenim una coalició S formada pels agents que arriben abans que l'agent i. Llavors, d'acord amb la regla de repartiment que estem utilitzant, l'agent hi rebrà:

$$x_i = \begin{cases} c_i & \text{si } E - \sum_{j \in S} c_j \geq c_i \\ E - \sum_{j \in S} c_j & \text{si } c_i > E - \sum_{j \in S} c_j \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 > E - \sum_{j \in S} c_j \end{cases}$$

Per tant, tenint aquests casos, hem de veure que la solució x_i per l'agent i és una component de la solució del valor de Shapley en el joc cooperatiu $v_{(E,c)}$. Hem de trobar el component del valor de Shapley que pertany al ordre contrari d'arribada. Per tant, per aquest ordre, la coalició que arriba abans que l'agent i serà $S' = N \setminus (S \cup \{i\})$, per tant, segons el valor de Shapley. la contribució de l'agent i a la coalició S' serà $y_i = v(S' \cup \{i\}) - v(S') = \max\{E - \sum_{j \in S} c_j, 0\} - \max\{E - \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j, 0\}$. Per això, com en el cas de la regla del *Run to the bank* distingim tres possibles casos:

$$y_i = \begin{cases} E - \sum_{j \in S} c_j - (E - \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j) & \text{si } E \geq \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j \\ E - \sum_{j \in S} c_j & \text{si } \sum_{j \in S \cup \{i\}} c_j > E \geq \sum_{j \in S} c_j \\ 0 & \text{si } 0 > E - \sum_{j \in S} c_j \end{cases}$$

Si reordenem els termes, veiem que els tres casos coincideixen amb els tres casos anteriors, per tant, tenim que $x_i = y_i$. La regla del *Run to the bank* assigna a l'agent $i \in N$ la mitjana de tots els x_i possibles suposant que tots els ordres d'arribada tenent les mateixes possibilitats de ser triats, i el valor de Shapley és la mateixa mitjana amb els mateixos nombres, per tant, tenim una correspondència. □

La CEA i la solució de Dutta-Ray

Teorema 5.7. *Existeix una correspondència entre la regla CEA i la solució puntual dels jocs cooperatius Dutta-Ray.*

Demostració. Com hem dit abans, la CEA és una regla de repartiment consistent, a més, en el subconjunt dels jocs cooperatius convexos, la solució de Dutta-Ray és una solució consistent, això surt directament de la definició de la Dutta-Ray que selecciona per cada joc, el vector de pagaments que resol una certa minimització del mateix joc.

Un cop tenim això, hem de convertir el problema de repartiment amb un joc cooperatiu amb una operació que consisteix en reduir el joc respecte a un subconjunt dels agents i un vector de pagaments:

Sigui $(E,c) \in \mathbb{B}^N$, $x \in X(E,c)$ una solució del problema de repartiment i sigui $S \subseteq N$ una coalició de N, reduïm el problema de repartiment en el subconjunt S amb una funció $r_S^x : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{B}^S$ que fa el següent: $r_S^x(E,c) = (\sum_{i \in S} x_i, c_S)$.

Per un problema qualsevol de 2 agents, demostrem que la CEA coincieix amb el vector de pagaments que ens surt aplicant la solució de Dutta-Ray al problema convertit en joc cooperatiu:

Siqui $N = \{i,j\}$ i suposem que $c_i \leq c_j$. Llavors, tenim que $\dfrac{v(N)}{2} = \dfrac{E}{2}$ i:

$$\frac{E}{2} - v(\{i\}) = \begin{cases} \dfrac{E}{2} & \text{si } \dfrac{E}{2} \leq c_j \\ c_j - \dfrac{E}{2} & \text{si } c_j < \dfrac{E}{2} \end{cases}$$

$$\frac{E}{2} - v(\{j\}) = \begin{cases} \dfrac{E}{2} & \text{si } \dfrac{E}{2} \leq c_i \\ c_i - \dfrac{E}{2} & \text{si } c_i \leq \dfrac{E}{2} \end{cases}$$

Per tant, com que $c_i \geq c_j$ tenim dos casos a comprovar:

i). $\dfrac{E}{2} \leq c_i$, llavors $\left(\dfrac{E}{2}, \dfrac{E}{2}\right) \in C(v)$ així, tenim que $DR(v) = \left(\dfrac{E}{2}, \dfrac{E}{2}\right) = CEA(E,c)$.

ii). $c_i < \dfrac{E}{2}$, llavors $\left(\dfrac{E}{2}, \dfrac{E}{2}\right) \notin C(v)$ i $\dfrac{E}{2} < v(\{j\}) = E - c_i$, així, tenim que $DR(v) = E - (v(\{i\}, v(\{j\}) = (c_i, E - c_i) = CEA(E,c)$.

Per acabar, com que són solucions consistents, aplicant el Lema de l'elevació podem concloure que hi ha una correspondència entre la CEA i la solució de Dutta-Ray.

□

La regla del Talmud i el nucleolus

La següent relació la trobem entre la regla del Talmud i la solució puntual del nucleolus. Per demostrar-ho utilitza la definició del prenucleolus i el fet de que és una solució consistent.

Teorema 5.8. *Existeix una correspondència entre la regla del Talmud i la solució puntual dels jocs cooperatius el nucleolus.*

Demostració. La podem trobar a Aumann i Maschler (1985) [2]. □

La regla ajustada de la proporcionalitat i el τ-valor

Per acabar, donarem la correspondència entre la regla ajustada de la proporcionalitat i el *tau*-valor. Aquesta regla, és una variant de la regla proporcional, aplicant-li les propietats dels drets mínims i el truncament de demandes:

Regla ajustada de la proporcionalitat, AP: Per cada problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ definim la regla ajustada de la proporcionalitat com:

$$AP(E, c) = m(E, c) + P(\min\{c_i - m_i(E, c), E - \sum_{i=1}^{N} m_i(E, c)\}, E - \sum_{i=1}^{N} m_i(E, c))$$

.

On $m(E, c)$ és el vector de drets mínims definit anteriorment.

Teorema 5.9. *Existeix una correspondència entre la regla Ajustada de la proporcionalitat i la solució puntual dels jocs cooperatius τ-valor.*

Demostració. La demostració es troba a Curiel, Maschler i Tijs (1987) [4]. □

Capítol 6

Aplicacions

En aquest capítol veurem dos estudis en els que s'han aplicat els problemes de repartiment per tractar de donar solucions a dos famosos problemes de la societat actual. El primer afer que analitzarem serà un estudi realitzat per María José Solís-Baltodano, Cori Vilella i José Manuel Jiménez-Gómez al 2018 [29] sobre el repartiment del pressupost de la sanitat pública de Catalunya en plena crisi del 2007, en concret, del 2011 al 2014. El segon estudi a analitzar va ser dut a terme per Juan Antonio Duro, José-Manuel Giménez-Gómez i Cori Vilella al 2020 [11] dona una solució al repartiment de les emissions de CO2 analitzant-lo com a un problema de repartiment.

Els dos estudis utilitzen la mateixa metodologia per resoldre-ho. Analitzen la situació com un problema de repartiment, aplicant diverses lleis i un cop fet això, a partir de criteris d'estabilitat analitzen les diferents lleis formalment per a descartar les que no són estables. Per últim, apliquen el que anomenen com a restriccions acceptades socialment. Aquestes restriccions són clau a l'hora de determinar com es reparteix el pressupost, ja que és important seguir un repartiment formal, però també s'ha de seguir un repartiment socialment adequat i acceptat.

6.1 Criteris i restriccions

Com que els dos estudis utilitzen gairebé les mateixes restriccions socialment acceptades i els mateixos criters, abans d'analitzar els resultats obtinguts en cada estudi enunciarem els criteris necessàris per entendre les conclusions dels estudis.

Restriccions socialment acceptades

Preservació de l'ordre: Per cada $(E, c) \in \mathbb{B}^N$, cada $i, j \in N$ tal que $c_i \geq c_j$, llavors $r_i \geq r_j$ i $c_i - r_i \geq c_j - r_j$, on $r \in \mathbb{R}^N$ és el vector solució del problema.

Aquesta restricció va ser introduida per Aumann i Maschler el 1985 [2] i ens diu que la regla triada per a la solució del problema ha de respectar l'ordre de les demandes, és a dir, si un agent i té una demanda més gran que l'agent j, l'agent i ha de rebre com a mínim el mateix que j i a més, la pèrdua ha de ser més gran o igual que la pèrdua de j. Aquesta restricció és important ja que ens assegura que es manté l'ordre segons els agents.

Monotonia dels recursos: Per cada $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $E' \in \mathbb{R}_+$ tal que $C > E' > E$, llavors $r_i(E', c) \geq r_i(E, c)$ per tot $i \in N$, on $C = \sum_{i \in N} c_i$.

Aquesta restricció va ser introduïda per Young al 1987 [37] i ens diu que si el capital augmenta respecte a un problema de repartiment, en el nou cas, cada agent ha de rebre com a mínim el que rebia abans.

Super-modularitat: Per cada $(E,c) \in \mathbb{B}^N$, tot $E' \in \mathbb{R}_+$ i tot $i,j \in N$ tal que $C > E' > E$ i $c_i \geq c_j$, llavors $r_i(E',c) - r_i(E,c) \geq r_j(E',c) - r_j(E,c)$.

La super-modularitat (Dagan, Serrano i Volij, 1997) [7] ens diu que si el capital d'un problema de repartiment augmenta, els agents amb major demanda augmentaran més el seu benefici respecte als altres. Observem que aquesta restricció donarà prioritat als agents amb les demandes més grans.

Límits inferiors: Per cada $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ i cada $i \in N, r_i \geq \dfrac{\min\{c_i, E\}}{n}$.

Aquesta restricció va ser introduïda per Dominguez i Thomson el 2006 [10], assegura a cada agent amb una demanda raonable, la seva demanda dividida entre el nombre d'agents. Si la seva demanda no és raonable, li assegura el capital dividit entre els agents. En els casos que estem estudiant, aquesta restricció és important, ja que assegura un mínim a cada agent.

L'índex de Gini

Aquest criteri ens servirà per a mesurar la equitat de les solucions, va ser introduït per Gini al 1921 [15] i és el criteri d'equitat més popular de tots.

Definició 6.1. Sigui un problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ on se li aplica una regla R i r el vector de solució, anomenarem índex de Gini:

$$Gi = \frac{1}{2N^2\mu}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}|r_i - r_{j<i}|$$

Observem que aquest índex considera la distribució mitjana i la diferència entre un agent i un altre, a més veiem que $Gi \in [0,1]$ on $Gi = 0$ representa la equitat total i $G = 1$ representa la desigualtat total, per tant, com més baix sigui l'índex, més equilibrada serà la distribució donada.

La dominació de Lorenz

Aquest criteri ens ajudarà a ordenar les regles de repartiment segons la equitat donada, va ser introduït per Dutta i Ray al 1989 [12].

Definició 6.2. Sigui $x, y \in \mathbb{R}^N$ dos vectors que suposem ordenats, és a dir, $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ i el mateix per y, diem que x té una dominació de Lorenz sobre y, $x \succ_L y$, si per cada $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$x_1 + \ldots + x_k \geq y_1 + \ldots + y_k \text{ i a més, } x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n.$$

Observem que si $x \neq y$, almenys una de les desigualtats proposades ha de ser una desigualtat estricta. En el nostre cas, direm que una regla exerceix una dominació de Lorenz sobre una altre si comparem els dos vectors solució i compleixen les desigualtats establertes.

Coeficient de variació

Aquest coeficient, va ser introduït per Dinar i Howitt al 1997 [9] i serveix per a mesurar l'estabilitat d'una solució. Sobretot és utilitzat per a trobar solucions estables en els jocs cooperatius.

Per definir-lo necessitem definir l'índex de potència d'una solució, que utilitza la millor distribució d'una demanda $r_i^{\max}$ que serà l'aplicació de la regla que li associï el valor més gran possible. Per altra banda definim W_i com la mitjana de les últimes dades "reals" dels darrers anys.

Definició 6.3. Sigui un problema de repartiment $(E,c) \in \mathbb{B}^N$ on se li aplica una regla R i r el vector de solució, anomenarem Índex de Potència:

$$PI_i = \frac{W_i \cdot (r_i^{\max} - r_i)}{\sum_{j \neq i} W_j \cdot (r_j^{\max} - r_j}\,)$$

Un cop definit l'Índex de Potència podem definir el coeficient de Variació:

Definició 6.4. Sigui un problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ on se li aplica la regla R i el vector de solució r, anomenarem coeficient de Variació:

$$CV = \frac{\sigma(PI)}{\mu(PI)}$$

on $\sigma(PI)$ és la desviació estàndard de PI i $\mu(PI)$ és la mitjana de l'Índex de Potència respectiu.

Observem que com més alt sigui el coeficient de variació, més alta serà la inestabilitat en la regla.

El mètode de Borda

Finalment, amb les regles acceptades pels dos criteris anteriors, els estudis utilitzen un mètode contador d'elecció anomenat Borda, introduït per Jean Charles Borda al 1770. Aquest mètode és molt simple cada agent assigna 1 punt a la seva regla preferida i 0 a les altres, formalment:

Definició 6.5. Per un problema de repartiment $(E, c) \in \mathbb{B}^N$ i un seguit de regles de repartiment $R_1, \ldots, R_n$ es defineix el mètode d'elecció de Borda com:

$$B = \max_i (B_i)$$

on $B_i = \sum_{j \in N} R_{ji}$ i R_{ji} denota el vector de cada regla amb les puntuacions donades pels agents.

Per tant, segons el mètode d'elecció de Borda denotarem com a millor la regla que més puntuació tingui.

6.2 El pressupost de sanitat a Catalunya

En aquest estudi el que es va analitzar va ser el repartiment del pressupost de la sanitat a Catalunya entre el 2011 i el 2014, coincidint amb l'època de fortes retallades degut a la crisi econòmica del 2007. Per fer-ho tracten el problema com un problema de repartiment, on els agents són els principals camps de sanitat: Salaris, despeses corrents de béns i serveis, transferència actual, transferència de capital, inversió real i variació d'actius financers. En aquest cas, el capital del problema serà el pressupost assignat per la generalitat a tota l'àrea de sanitat. Així tindrem 4 problemes diferents (1 per cada any estudiat) amb els següents pressuposts: 8.952,8; 8.403,8; 7.840.6 i 7.841,8 en milions d'euros. Com a punt de partida, agafen com a demandes la quantitat rebuda per cada agent el 2010, així quedarà el següent vector de demandes: $c = (44,1; 82,1; 207,8; 1.497,7; 2.080,6; 5.391,1)$

Per començar l'estudi, apliquen un seguit de regles de repartiment per a comparar diverses situacions: la proporcional, la CEA, la CEL, la del Talmud, la proporcional ajustada i la $\alpha^{\min}$. A partir de totes aquestes possibilitats, l'estudi es basarà en veure quin d'aquests repartiments és el que més s'adapta a la realitat. Per fer-ho, utilitzen l'índex de Gini com a criteri d'equitat. Al aplicar-ho, observem que els resultats ja comencem a veure les primeres diferències entre les regles: s'observa que tots els valors es mouen entre $Gi \in [0.57, 0.67]$ i els que són més baixos són els de la CEA, la proporcional i la $\alpha^{\min}$, quedant com a valors més grans els obtinguts amb la CEL.

A més, utilitzen el coeficient de variació com a criteri d'estabilitat, ja que utilitzant només el criteri d'equitat observem que les àrees amb una demanda més gran es poden veure afectades. Observem que al aplicar-lo, passa a l'inrevès que amb l'anterior, les regles amb el coeficient més baix són les que tenien l'índex de Gini més alt i la regla amb el coeficient de variació més alt serà la CEA. Així doncs, les regles que més s'ajusten als dos criteris són la proporcional i la $\alpha^{\min}$.

Per decidir quina de les dues s'adequa més a la situació, utilitzen el mètode d'elecció de Borda. Per aquest mètode, observem que entre les dues, la regla més votada és la $\alpha^{\min}$. Finalment, observem que a cada any hi ha varies diferències entre la regla que s'ajusta més al repartiment que al repartiment real, per explicar-ho utilitzen les anomenades restriccions socials comunment acceptades.

Primer de tot, el repartiment real ha de complir la propietat de l'igual tractament dels iguals, és a dir, dues àrees amb demandes semblants han de ser tractades igual. A més, la preservació de l'ordre és important, és a dir, una àrea que demana més que una altre no pot rebre menys. A més si hi ha un increment en el pressupost, una àrea no pot rebre menys que en l'anterior, aquesta restricció s'anomena monotonia i la veiem en els anys en que el pressupost incrementa respecte l'any anterior. Lligada a la restricció anterior, la super-modularitat, quan en un any s'incrementa el pressupost, les àrees amb més demanda seràn les que veuran un increment més gran de la seva assignació. Per acabar, els límits inferiors també són molt importants, aquesta restricció ens diu que totes les àrees han de rebre com a mínim la seva demanda dividida entre el nombre d'agents que hi ha.

6.3 Les emissions de CO_2

En aquest estudi proposen estudiar el problema de les emissions de CO_2 com un problema de repartiment, seguint un criteri d'estabilitat i neutralitat. Com en l'anterior, estudien els diferents resultats al problema amb 7 regles de distribució diferents. Per a estudiar quina s'adapta millor a les característiques del problema, utilitzaran el criteri ja esmentat de l'índex de Gini per a mesurar l'equitat i el coeficient de variació per a mesurar l'estabilitat de cada distribució. En concret, els problema (E, c) serà el següent: El grup dels agents serà un sistema de regions que englobaran totes les zones mundials, E la quantitat de CO_2 permesa a repartir entre les diferents regions i c el vector de demandes dels agents. En concret, s'estudiaran 3 models, amb diferent E depenent dels diferents escenaris que els experts han previst per l'any 2050.

En aquest estudi, apliquen diverses regles de repartiment per a comparar diferents situacions i repartiments possibles: la proporcional, la proporcional ajustada, la CEA, la CEL, el Talmud, la *Run to the bank* i la $\alpha^{\min}$. Òbviament, si donessim a triar entre una d'aquestes solucions, cada regió triaria la que li dona amb ella més permisos, però el repartiment final ha de seguir un seguit de normes i requeriments anomenades restriccions socialment acceptades anunciades anteriorment.

Les restriccions socialment acceptades que han utilitzat en aquest estudi són l'igual tractament als iguals, l'anonimat, la preservació de l'ordre, la monotonia dels recursos, la super-modularitat i la composició. Les primeres restriccions ens asseguraran que no hi ha discriminació entre els agents, fent que només importi la demanda feta. Tenim però que les 5 primeres les compleixen totes les regles de repartiment triades, per tant, haurem de d'utilitzar l'última per a descartar opcions. Comencem analitzan la composició de manera que es redueix la permissió d'emissió de CO_2, ho podrem calcular de dues maneres diferents: cancel·lant la primera distribució i tornant a fer l'assignació de nou o considerant les distribucions inicials. La composició ens diu que els dos camins ens portaran a la mateixa solució del problema.

Aquí s'observa que hi ha les primeres regles que no ho compleixen, la CEL, la proporcionalitat ajustada i la *Run to the bank* són regles que no compleixen la composició quan es redueix el pressupost. Quan el pressupost incrementa, de nou la composició ens diu que ambdues maneres de resoldre el problema ens porten a la mateixa solució. Observem doncs, que les mateixes regles que no complien la composició quan decreixia el pressupost tampoc la compleixen quan incrementa. A més, podem obervar que la CEL des d'un punt de vista pràctic és molt difícil d'aplicar, ja que possiblement a l'hora de fer la distribució hi hauria regions que es quedarien sense permis d'emissió de CO_2.

Per mesurar l'equitat de les solucions utilitzen dos conceptes: per començar, apliquen la dominació de Lorenz, que l'utilitzen per a veure quina solució serà més favorable per a les petites regions i quina per a les grans, així doncs, la millor solució haurà de ser un punt intermig entre els extrems de la dominació per poder satisfer a tothom. Veiem que per la dominació de Lorenz ens quedarà:

$$CEA \succ_L \alpha^{\min} \succ_L P \succ_L CEL$$

Per tant, la CEA serà la solució més equitativa, en canvi, la CEL, serà la mes desigual, per tant, la que més afavoreix a les grans regions. Veiem però, que no hi ha cap dominació per la *Run to the bank*, el Talmud i la proporcional ajustada. Com que tenim un seguit de regles que no es poden col·locar en termes de la dominació de Lorenz, utilitzen l'índex de Gini per a poder veure quina de les regles és més equitativa.

Per tenir en compte les diferències entre les regions depenent del la distribució històrica que hi ha hagut d'emissions de CO_2 utilitzen l'estabilitat, utilitzant l'índex de potència que és un índex que ha servit per a proposar solucions estables pels jocs cooperatius, gràcies a la relació entre aquests i els problemes de repartiment podem utilitzar-lo pel cas que ens ocupa. Per acabar, mesuraren la disperció a la mitjana de les distribucions. Per fer-ho, utilitzen el coeficient de variació.

Per aplicar la teoria al cas pràctic, utilitzen com a vector de demandes les emissions teòriques futures de les regions, aquestestes emissions són tretes de 4 estudis diferents que s'han dut a terme: el primer, estudia el pitjor dels escenaris, on les regions no han reduït les emissions de CO_2, els dos següents, són escenaris intermitjos, on els efectes de la reducció de les emissions ja afecten a les demandes, per últim, tenim el millor escenari en termes d'emissions. En l'estudi, ajunten els dos escenaris intermitjos, per tant, ens quedaran 3 problemes de repartiment diferents. Les dades, són donades amb gigatones d'emissions de CO_2. Pel que fa als agents, divideixen el planeta en 5 regions: Asia (exceptuant l'orient mitjà); Oest d'Europa, Amèrica del Nord i el Pacific (OECD); l'est d'Europa (REF); Africa i l'orient Mitjà (MAF) i America llatina (LAM), ordenades de demanda més petita a demanda més gran.

Observen que al aplicar els problemes cada regió defensaria una regla, per exemple, Asia i OECD com que són els agents amb demandes més grans, defensarien la CEL en tots els casos, però veiem que la CEL no és una regla ètica, ja que les altres tres regions, en els dos últims escenaries no tindrien drets d'emissió. Pel que fa a LAM i MAF, com que són els agents amb demandes més baixes reclamarien que s'apliquès la CEL, ja que per exemple, en el primer escenari, la LAM obtindria la plenitut de la demanda.

Pel pitjor dels escenaris, observen que la CEA és la única regla que satisfà l'equitat i l'estabilitat, ja que és una solució molt equitativa. Pels escenaris restants, la CEA i la $\alpha^{\min}$ satisfan els dos criteris, però veiem que en el cas de la CEA, la reducció que ha de fer Asia que és l'agent amb la demanda més gran és molt més gran que els altres, per tant, conclouen que s'hauria de triar una solució més proporcional com és la α^{min}.

Per acabar, apunten que la solució més bona i que satisfà a més regions seria la CEA en tots els escenaris, però també cal tenir en compte que en una negociació així no totes les regions tenen el mateix pes, per tant, la solució a proposar es la $\alpha^{\min}$ ja que precisament, les regions amb més poder de negociació són les que tenen les demandes més grans.

Bibliografia

[1] Alcalde, J.; Marco, M.C.; Silva, J.A. (2008) The minimal overlap rule revisited. Soc Choice Welfare 31, 109-–128.

[2] Aumann, R. and Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, Journal of Economic Theory 36, 195-213.

[3] Black, D. (1976). Partial justification of the Borda count, Public Choice 28(1), 1–15.

[4] Curiel, I., M. Maschler, and S. H. Tijs, (1987). Bankruptcy games, Zeitschrift für Operations Research 31, A143–A159.

[5] Chun Y., Thomson W. (2005). Convergence under replication of rules to adjudicate conflicting claims. Games and Economic Behavior 50, 129–142.

[6] N. Dagan N. (1996) New characterizations of old bankruptcy rules Social Choice and Welfare 13, 51–59.

[7] Dagan, N., Serrano, R. and Volij, O. (1997). A non-cooperative view of consistent bankruptcy rules, Games and Economic Behavior 18, 55–72.

[8] Davis, M. and Maschler, M. (1965). The kernel of a cooperative game, Naval Research Logistics Quarterly 12(3), 223–259.

[9] Dinar, A. and Howitt, R. E. (1997), "Mechanisms for allocation of environmental control cost: empirical tests of acceptability and stability", Journal of Environmental Management, 49(2): 183-203.

[10] Domínguez, D. and Thomson, W. (2006), A new solution to the problem of adjudicating conflicting claims, Economic Theory 28(2), 283–307.

[11] Duro, J. A.; Giménez-Gómez, J. M.; Vilella, C. (2020). The allocation of CO2 emissions as a claims problem. Energy Economics 86, 104652.

[12] Dutta, B.; Ray, D. (1989). A concept of egalitarianism under participation constraints. Econometrica 57, 615–635.

[13] Gardner, R. (1996). Juegos para empresarios y economistas, Antoni Bosch, ed.

[14] Gillies, D.B. (1959). Solutions to general non-zero-sum games. In H.W. Kuhn and A. W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press, Princeton. pp. 47—85.

[15] Gini, C. (1921), Measurement of inequality of incomes, The Economic Journal, 31(121): 124–126.

[16] Greco, G.; Malizia, E.; Palopoli, L.; Scarcello, F. (2015). The complexity of the nucleolus in compact games. ACM Transactions on Computation Theory (TOCT), 7(1), 3.

[17] Herrero, C. and Villar, A. (2001). The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems, Mathematical Social Sciences, 42, 307–328.

[18] Nash, J.F. (1950). Equilibrium Points in N-Person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 36(1):48—49.

[19] Moulin, H. (2000). Priority rules and other asymmetric rationing methods. Econometrica 68, 643–684.

[20] O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud, Mathematical Social Sciences 2(4), 345–371.

[21] Giménez-Gómez, J.-M. and Peris, J. E. (2014), "A proportional approach to claims problems with guaranteed minimum", European Journal of Operational Research, 232(1): 109-116.

[22] Peters, H. (2008). Game theory. A multi-leveled approach. 10.1007/978-3-540-69291-1.

[23] Piniles, H.M., (1861). Darkah shel Torah. Forester, Vienna

[24] Rafels, C.; Izquierdo, J.M.; Marín-Solano, J.; Martínez de Albéniz, F.J.; Núñez, M.; Ybern, N. (1999). Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques. Edicions de la Universitat de Barcelona.

[25] Rebinovitch, N.L. (1973). Probability and Statistical Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature, University of Toronto Press, Toronto.

[26] Roth, A.E.(ed.) (1988) The Shapley value: Essays in honor of L.S. Shapley. Cambridge University Press.

[27] Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics 17:1163–1170.

[28] Shapley L.S. (1953) A value for n-person games. In: Contributions to the Theory of Games, vol. II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds), Ann. Math. Studies 28, Princeton University Press, pp. 307—317.

[29] Solís, M. J.; Giménez-Gómez, J. M.; Vilella, C. (2019). The Catalan Health Budget: A Conflicting Claims Approach. Hacienda Pública Española/Review of Public Economics, 228(1), 35-54.

[30] Sprumont, Y. (1991). "The division problem with single-peaked preferences: a characterization of the uniform allocation rule," Econometrica 49, 509–519.

[31] Thomson, W. (1996). Consistent allocation rules. Mimeo, University of Rochester, Rochester, NY, USA.

[32] Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey, Mathematical Social Sciences, 45(3):249–297.

[33] Thomson, W. (2011). Consistency and its converse: an introduction. Rev Econ Design 15:257—291.

[34] Thomson, W. (2019). How to Divide When There Isn't Enough: From Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the Axiomatics of Resource Allocation (Econometric Society Monographs). Cambridge: Cambridge University Press.

[35] Tijs, S.H. (1981). Bounds for the core and the τ-value. In Game Theory and Mathematical Economics, O. Moeschlin and D. Pallaschke (eds.) North Holland Publishing Company, pp. 123–132.

[36] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton.

[37] Young, P. (1987), On dividing an amount according to individual claims or liabilities, Mathematics of Operations Research, 12(3):398–414.

[38] Young, P. (1988). Distributive justice in taxation. Journal of Economic Theory 43, 321–335.

[39] Young, P. (1994), Equity. Princeton University Press, Princeton.